

Crispiniano de Jesus Gomes Furtado

Dinâmica de Tráfego de Veículos



Departamento de Matemática
Julho de 2013

Crispiniano de Jesus Gomes Furtado

Dinâmica de Tráfego de Veículos



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre
em Engenharia Matemática*

Orientador: Professor Doutor Sílvio Marques de Almeida Gama

Departamento de Matemática
Julho de 2013

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer ao meu orientador professor Sílvio Marques de Almeida Gama, pela paciência e dedicação que teve para comigo durante todo este percurso, e pelo vasto conhecimento que pôs à minha disposição.

Gostaria de agradecer à minha família, pelo amor e pelo carinho que sempre demonstraram por mim.

Gostaria de agradecer ao meu colega de mestrado Nilson Moreira que foi um grande colega/amigo de luta durante o curso, e à Maria Margarida da Silva Carvalho pelos incentivos e apoios durante a realização do mestrado.

Finalmente, gostaria de deixar um agradecimento à todos que tiveram uma contribuição para a minha tese, de forma indirecta, incluindo os *developers* do LyX.

Resumo

Nesta tese consideramos duas abordagens para o tráfego de veículos: a abordagem macroscópica e a abordagem microscópica.

O tráfego é descrito macroscopicamente por três grandezas físicas interligadas entre si, a saber, a velocidade, a densidade e o fluxo, e as leis de conservação de massa e do momento. Há vários modelos para o tráfego macroscópico de veículos. A maioria deles aproxima o tráfego de veículos como um fluido compressível. O primeiro destes modelos, proposto por Lighthill-Whitham-Richards, traduz a lei de conservação de massa para os carros e requer uma lei de estado para o par velocidade-densidade. Os outros modelos (PW, Zhang e Aw-AR), incorporam duas equações onde a primeira traduz a lei da conservação da massa e a segunda a lei da conservação do momento.

A abordagem microscópica considera os veículos como partículas individuais. Consideramos os modelos da classe *car-following*. Estes modelos baseiam-se no princípio de que o i -ésimo veículo (denominado de *following-car*) acelera em função do estímulo que recebe do $(i + 1)$ -ésimo veículo (denominado de *leading-car*), o qual este segue. O modelo mais conhecido é o chamado General Motor (GM) que se baseia no modelo *follow-the-leader* desenvolvido por Pipes (1953). A ideia é que o *following-car* tende a acelerar/desacelerar de forma a ajustar-se à velocidade do seu *leading-car*. Bando et al. (1995) consideraram um outro modelo *car-following* que o baptizaram de velocidade ótima (OV). Este modelo considera que o tráfego é regulado por uma certa velocidade ótima. Neste modelo, o *following-car* viaja a uma velocidade ótima que é função da distância para o *leading-car*. Se a distância para o *leading-car* for pequena, o veículo reduz a sua velocidade. Se esta distância for suficientemente grande, o veículo viaja à velocidade livre (que pode ser a velocidade máxima do carro, ou a velocidade máxima permitida por lei).

Simulações numéricas do fluxo do tráfego, feitas nesta tese, mostram que os modelos evidenciam regimes que partilham aspectos comuns com regimes de condução real, nomeadamente, as situações de *pára-arranca*, aceleração e desaceleração, congestionamento etc.. Todavia, os modelos contêm algumas imperfeições. No modelo GM, o *following-car* interage com o *leading-car* mesmo se a distância entre eles for muito grande (por exemplo, o *following-car* nunca circula a uma velocidade superior ao do seu *leading-car*, mesmo que tenha espaço para o fazer). No entanto, no modelo de Bando, quando o condutor segue o seu *leading-car* e a distância a ele for suficientemente grande, o veículo não interage com o seu *leading-car* e circula a uma velocidade livre. Porém, pudemos verificar que algumas acelerações irrealistas surgem neste modelo.

Abstract

In this thesis we consider two approaches for the traffic flow: the macroscopic and microscopic approaches.

The traffic is macroscopically described by three related physical quantities, namely, density, flux, and velocity, and the conservation laws of mass and momentum. There are several models for macroscopic case. Most of them approach the traffic flow as a compressible fluid. The first of these models, proposed by Lighthill-Whitham-Richards, expresses the conservation law of mass in terms of conservation of cars and requires a state-law for the pair velocity-density. The other models (PW, Zhang and Aw-Rascle) incorporate two equations: the first one reflects the law of mass conservation and second one the law of momentum conservation.

The microscopic approach considers the vehicles as individual particles. We consider the car-following class models. These models are based on the principle that the i -th vehicle (called following-car) accelerates due to the stimulus received from the $(i + 1)$ -th vehicle (called leading-car) which follows this. The best known model is called the General Motors (GM) model which is based on follow-the-leader model developed by Pipes (1953). The idea is that the following-car tends to accelerate/decelerate in order to adjust its velocity to the leading-car velocity. Bando et al. (1995) considered a different car-following model that they coined as the optimal velocity (OV). This model assumes that the traffic flow is regulated by a certain optimum velocity: the following-car travels at an optimum velocity that is a function of the distance to the leading-car. If this distance is small, the vehicle reduces its speed. If the distance is large enough, the vehicle travels at free speed (which can be the maximum velocity of the car can reach, or the maximum velocity permitted by law).

Numerical simulations of the traffic flow show that the models display regimes that share common features with real driving regimes, in particular, situations like stop-and-go, acceleration and deceleration, traffic jam, etc.. However, the models contain some imperfections. In GM model, the following-car interacts with the leading-car even if the distance between them is very large (for example, the following-car can never run at a velocity higher than its leading-car, even though it has space to do so). However, in Bando's model, when the driver follows its leading-car and the distance to it is large enough, the vehicle does not interact with its leading-car and circulates at free velocity. However, we have observed that some unrealistic accelerations arise in this model.

Rizumu

Na kel tezi li nu konsidera dos abordajem pa fluksu di karu: makroskopiku y mikroskopiku.

Fluksu di karu ta diskrevedu podi odjadu di jetu makroskopiku pa tres variavel keh ligadu ku kumpanheru, pa sabi: fluksu, densidadi y velosidadi. Na kazu makroskopiku tem um munti mudelu. Maioria des ta tenta aprosima karu a kuzas likidus. Primeru mudelu eh di Lighthill-Whitham-Richards, y eh izamenti mesmu kuza ki lei di konservasom di masa. Otus, moda PW, Zhang y AW-AR ta spresa lei di konservasom di masa y es ta iziji um lei ki ta txomadu lei di stadu (ta rilasiona vilosidadi ku aselerasom) y lei di konservasom di mumentu.

Abordajem mikroskopiku ta konsidera karus moda um kuza soltu. Nu konsidera um tipu di mudelus konxedu pa *car-following*. Kes mudelus li ta bazeia na prinsipiu di ki i —*ezimo* karu (ki ta txomadu *following-car*) ta silera sima eh ta resebi stimulu di $(i + 1)$ —*ezimo* karu (ki ta txomadu di *leading-car*), ki eh kel ke ta sigi. Mudelu mas konxedu ta txomadu di General Motor (GM) y eh ta bazeia na mudelu *follow-the-leader* dizenvolidu pa Pipes (1953). Ideia eh ma *following-car* ta silera/diselera pe fika ku mesmu velosidadi ku si *leading-car*. Bando et al. (1995) es konsidera um otu mudelu *car-following* ki es batiza di velosidadi otima (OV). Na di ses, velosidadi otima ki ta rigula tranzitu. Na kel mudelu li, *following-car* ta viaja ku um velosidadi otima ki eh funsom di distansia a *leading-car*. Si distansia pa *leading-car* for pikinoti eh ta riduzi. Si for grandi sufisienti, eh ta viaja na velosidadi masima (o ntom masimu ki lei ta pirmiti).

Simulasons di fluksu na tranzitu, ki nu fazi nes trabadju, ta mostra ma mudelus ta pruduzi rijimis sima kel ki nu ta observa na rialidadi, moda, *para-torna-aranka*, silera/diselera, konjestionamentu, y otus mas. Ma, es ka perfektu. Na mudelu GM, *following-car* ta interaji ku *leading-car* mesmu si distansia entri es for grandi (por izemplu, *following-car* nunka ka ta sirkula ku velosidadi superior a di si *leading-car*, mesmu si eh tiver spasu pe fazel). Ago, na mudelu de Bando, oras ki xofer ta sigi kel otu y distansia for grandi sufisienti, eh ka ta interaji kual, eh ta sirkula livri. Ma, ta surji aselerasom ki ka ta kontisi na rialidadi.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Rizumu	iv
Índice de Tabelas	vii
Índice de Figuras	x
1 Introdução	1
2 Elementos fundamentais para fluxo do tráfego	3
2.1 Densidade	3
2.2 Fluxo	4
2.2.1 Curva de densidade versus fluxo	4
2.3 Modelos de velocidade do tráfego em equilíbrio	5
2.3.1 Modelo de Greenshields	5
2.3.2 Modelo de Greenberg	7
2.3.3 Modelo de Underwood	7
3 Leis de conservação	9
3.1 Lei da conservação de massa	9
3.1.1 Lei da conservação da massa no caso unidimensional . .	9
3.1.2 Lei da conservação de massa em duas dimensões	11
3.1.3 Lei da conservação de massa no caso n -dimensional . .	13
3.2 Conservação de momento	13
3.2.1 Lei da conservação do momento no caso unidimensional .	13
3.2.2 Lei da conservação do momento no caso bidimensional .	13
4 Modelos macroscópicos para o tráfego de veículos	15
4.1 Modelos macroscópicos unidimensionais	15
4.1.1 O Modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR)	15
4.2 Modelos de duas equações	16
4.2.1 Modelo Payne-Whitham (PW)	16
4.2.2 Modelo de Zhang	18
4.2.3 Modelo Aw-Rascle (AR).	20

5	Modelos microscópicos para tráfego de veículos	23
5.1	Breves notações	23
5.2	Modelo <i>car-following</i>	24
5.2.1	Modelo <i>general motor</i> (GM)	24
5.2.1.1	Modelos não lineares	26
5.2.1.2	Limitações do modelo GM	28
5.2.2	Modelo velocidade óptima (OV)	28
5.2.2.1	Estabilidade linear do modelo OV	28
5.2.2.2	Discussão do estado de equilíbrio	31
5.2.2.3	Escolha da função velocidade óptima	32
5.2.2.4	Algumas extensões do modelo velocidade óptima	34
6	Relação entre os modelos microscópicos e macroscópicos	37
6.1	Modelo GM proposto por Chandler et al. (1958)	37
6.2	Derivação do modelo de Greenshields	38
6.3	Derivação do modelo de Greenberg	38
6.4	Derivação do modelo de Underwood	39
7	Simulações numéricas e discussão de resultados	41
7.1	Simulação numérica do modelo GM ($l=0$ e $m=1$)	41
7.1.1	Condições iniciais e distribuições de veículos	42
7.1.2	Resultados e discussão	42
7.1.3	Apreciação global dos resultados	46
7.2	Simulação numérica do modelo velocidade óptima	47
7.2.1	Discussão de Resultados	47
7.2.2	Breve comparação entre modelos: OV, FVD e GF	54
7.2.3	Apreciação global dos resultados	56
8	Conclusão e trabalho futuro	59
8.1	Considerações Finais	59
8.2	Limitações e trabalho futuro	60
9	Apêndice	63
	Bibliografia	78

Lista de Tabelas

5.1	Estimativas de m e L (Bracstone e McDonald, 1999)	27
5.2	$\tanh h_c$	34
8.1	Distâncias médias de paragem segundo as normas portuguesas.	60

Lista de Figuras

2.1	Densidade	3
2.2	Relação entre densidade fluxo e velocidade	4
2.3	Diagrama da curva de fluxo Densidade.	5
2.4	Modelo de Greenshields - densidade vs. velocidade	5
2.5	Diagrama fundamental para o modelo de Greenshields	6
2.6	Densidade vs. velocidade (modelo de Greenberg) e o respectivo diagrama fundamental	7
2.7	Densidade vs. velocidade (modelo de Underwood) e o respectivo diagrama fundamental	7
3.1	Lei da conservação da massa no caso unidimensional	9
3.2	Conservação de massa no caso bidimensional	11
3.3	Lei da conservação do momento	13
3.4	Lei da conservação do momento no caso bidimensional	13
5.1	Diagrama cinemática do modelo <i>car-following</i>	24
5.2	Posições $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$ de N veículos numa pista circular de comprimento L	29
5.3	A região de estabilidade em coordenadas polares (f, α)	31
5.4	Função velocidade óptima	33
7.1	Esquema com a distribuição de alguns veículos, onde se identificam alguns dos parâmetros associados.	42
7.2	Posições dos veículos durante a primeira hora. O veículo-chefe circula a uma velocidade 30m/s.	43
7.3	(a) $(\Delta x_n, t)$ - <i>headway</i> dos 99 primeiros veículos. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos	43
7.4	Posições dos veículos durante os primeiros 10 minutos. O veículo-chefe circula a uma velocidade 20m/s.	44
7.5	(a) $(\Delta x_n, t)$ - <i>headway</i> dos 99 primeiros veículos. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos	44
7.6	(x_n, t) -posições dos veículos durante a primeira hora. O veículo chefe circula a uma velocidade 25m/s.	45
7.7	(a) <i>Headway</i> dos 99 primeiros veículos para a. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos	45
7.8	Posições dos veículos durante a primeira hora onde o veículo-chefe circula a 15m/s.	46
7.9	(a) $(\Delta x_n, t)$ - <i>headway</i> dos 99 primeiros veículos. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos	46

7.10 (t, x_n) posições dos 100 veículos na pista circular para o caso estável durante os primeiros 300 segundos	48
7.11 <i>Headway</i> dos veículos no caso estável	48
7.12 Evolução das velocidades dos veículos	49
7.13 (t, x_n) , posições dos 100 veículos na pista circular durante os primeiros 300 segundos	49
7.14 <i>headway</i> dos veículos durante 300s.	50
7.15 Flutuação das velocidades dos veículos ao longo do tempo. . .	50
7.16 Perfil da velocidade dos veículos no instante $t = 300$ s. . . .	51
7.17 Trajetória do décimo veículo no caso estável (a azul) e instável (a vermelho).	51
7.18 Perfil de velocidade do 10. ^o veículo. A azul, o caso estável e a vermelho o caso instável	52
7.19 Trajetória de todos os veículos (caso estável).	52
7.20 Trajetória de todos os veículos (caso instável).	53
7.21 Perfil da velocidade de todos os veículos nos instantes (a) $t = 300$ s, (b) $t = 500$ s e (c) $t = 1000$ s.	53
7.22 (t, x_n) , posições dos 100 veículos obtidos pela implementação do modelo OV ao longo de 300s.	54
7.23 (t, x_n) , posições dos 100 veículos obtidos pela implementação do modelo GF ao longo de 300s.	55
7.24 (t, x_n) , posições dos 100 veículos obtidos pela implementação do modelo FVD ao longo de 300s.	55
7.25 Acelerações no instante inicial. A vermelho temos o modelo FVD, a preto o modelo GF e a verde o modelo OV	56
7.26 Acelerações no instante final. A vermelho temos o modelo, FVD, a preto o modelo GF e a verde o modelo OV	56

Capítulo 1

Introdução

O interesse pelo estudo do tráfego de veículos, remonta ao início da segunda metade do Séc. XX. Com o advento da massificação dos veículos começou-se a estudar o fenómeno do congestionamento do tráfego. O propósito do estudo do tráfego é prever o comportamento dos veículos a partir de um conjunto de dados. Isto é de extrema importância em regiões de alta densidade de tráfego, que podem ser acompanhadas por um congestionamento no fluxo de trânsito provocadas pelo aumento brusco de tráfego de veículos ou até mesmo como um resultado de um acidente ou de um bloqueio de uma ou mais faixas de rodagem da via (Morgan, 2002). As primeiras publicações sobre o assunto datam de 1955 e são da autoria de Lightill e Whitham (1955a).

Há várias abordagens para modelizar o tráfego de veículos. Aqui, abordaremos somente as teorias macroscópicas e microscópicas.

Os modelos macroscópicos para o fluxo de tráfego assentam nos modelos da hidrodinâmica dos fluídos e assumem a existência de um fluxo contínuo de veículos. Esses modelos descrevem a relação da evolução das variáveis fundamentais, a saber, a densidade, a velocidade e o fluxo, bem como as leis de conservação de massa e do momento. Estas três variáveis estão ligadas entre si. $f = \rho v$ (fluxo é produto da densidade pela velocidade). Existem vários modelos através do qual definem v em função de densidade ρ .

Nos modelos microscópicos, os veículos e as suas interações são analisados de forma individual. Mais concretamente, a aceleração de cada veículo, assim como a sua velocidade, posição e distância aos restantes veículos são as variáveis usadas para caracterizar estes modelos que, de um modo geral, são representados por sistemas de equações diferenciais ordinárias com ou sem atraso. As soluções destes sistemas de equações conferem a descrição das condições do tráfego, nomeadamente, dão informações sobre a evolução das posições e velocidades. Na abordagem microscópica existem várias categorias de modelos, sendo, provavelmente, o mais popular de todos o chamado modelo *car-following*. O modelo *car-following* baseia-se no pressuposto de que cada condutor reage (ou responde) de uma forma específica a um estímulo, traduzido na forma de aceleração. Estes estímulos incluem a distância para o veículo da frente, a velocidade relativa para o veículo da frente, etc. A ideia chave deste modelo assenta-se, para o n -ésimo veículo, na proporcionalidade (Li e Sun, 2012)

$$[\text{Resposta}]_n \propto [\text{Estímulo}]_n.$$

Existem vários modelos do tipo *car-following*. Estes modelos diferenciam-se entre si pelos estímulos que incorporam.

No Capítulo 2 fizemos uma breve revisão sobre os parâmetros fundamentais do fluxo tráfego,

densidade velocidade e fluxo, e as suas relações mutuas. Destacamos o diagrama fundamental para o fluxo do tráfego e os modelos para o fluxo de tráfego em equilíbrio que descrevem a relação, directa, entre a velocidade e a densidade. Consideramos 3 modelos clássicos. O modelo mais simples, deve-se a Greenshields, e descreve velocidade como função linear da densidade. Greenberg propôs esta relação em termos de logaritmos enquanto que Underwood propôs em termos de exponencial.

No Capítulo 3 deduzimos as equações para as leis de conservação de massa e do momento. Consideramos a lei da conservação da massa (número de veículos por comprimento da via) e a lei de conservação do momento.

No Capítulo 4 consideramos 4 modelos macroscópicos propostos para o tráfego de veículos. O primeiro modelo considerado é o modelo LWR, desenvolvido por Lighthill e Whitham(1955a) e Richards (1956). Este modelo consiste numa única equação às derivadas parciais. Esta equação traduz a lei da conservação da massa cuja velocidade é prescrita pela relação directa entre a velocidade versus densidade visto no Capítulo 2 e assume que a velocidade depende da densidade do tráfego. O segundo modelo considerado é o modelo PW desenvolvido por Payne e Whitham, o modelo consiste em duas equações às derivadas parciais. O modelo assume similaridades entre o tráfego de fluidos compressíveis e tráfego de veículos. Esta assunção valeu-lhe muitas críticas. A crítica mais importante tem a ver com o facto de não se preservar a propriedade anisotrópica. Nos fluidos, o comportamento das partículas são influenciados pelas partículas vizinhas, o mesmo não se considera para o tráfego de veículos já que um condutor apenas reage ao veículo da frente. Deste modo, o modelo torna-se pouco realista. Zhang propôs um modelo semelhante ao modelo PW mas que preserva a propriedade anisotrópica desde que a função velocidade seja monótona decrescente. Um outro modelo que se afirma ser mais distante dos fluidos foi apontado por Aw e Rascle (2000), eles modificaram o termo de antecipação na equação de Navier Stokes e assumiram uma dependência em termos de derivadas convectivas. Mostramos que o modelo por eles concebido preserva a propriedade anisotrópica independentemente da função velocidade ser monótona decrescente ou não.

No Capítulo 5 fizemos uma breve revisão sobre a abordagem microscópica. Consideramos dois modelos *car-following*: O modelo General Motor (GM) que tem como base um modelo inicial designado por *follow-the-leader* (a aceleração é função da velocidade relativa para o veículo da frente) e o modelo Velocidade Óptima (OV), mais recente, proposto por Bando (1995) que baseia na ideia de que o tráfego é regulado por velocidade óptima que é uma função da distância para o veículo da frente.

No Capítulo 6 fizemos uma breve revisão sobre a ligação entre os modelos microscópicos com os modelos macroscópicos (modelos de Greenshields Greenberg e Underwood).

No Capítulo 7 apresentamos os resultados, com discussão, de simulações numéricas. Tomamos alguns modelos, microscópicos, como exemplo e fizemos a simulação do fluxo do tráfego. Analisamos os resultados levando em conta os vários regimes de condução real, nomeadamente, arranque, aceleração/desaceleração, pára-arranca, congestionamento, acidentes etc..

Finalmente, no Capítulo 8 discutimos sobre os resultados alcançados neste trabalho e metas para o trabalho futuro.

Capítulo 2

Elementos fundamentais para fluxo do tráfego

Tal como acontece com a água, o fluxo do tráfego também possui vários parâmetros associados ou grandezas físicas, o fluxo (f), a densidade (ρ), e a velocidade (v). Assim, compreender o a dinâmica do tráfego exige um conhecimento profundo desses parâmetros e bem como as suas relações mútuas. A relação mais importante entre estas variáveis é o seguinte

$$f = \rho v. \quad (2.1)$$

Outra relação, também importante é a relação entre a densidade e a velocidade. O objectivo principal deste capítulo é discorrer sobre os parâmetros fundamentais do fluxo do tráfego e as relações entre elas.

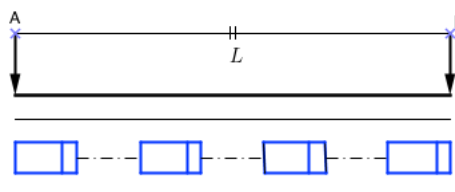


Figura 2.1: Densidade

2.1 Densidade

Considerando a Figura 2.1. Definimos a densidade, ρ , como o número de veículos por unidade de comprimento L . Ou seja, designando por n_L o número de veículos na faixa de comprimento L , distância entre A e B, temos que

$$\rho = \frac{n_L}{L}. \quad (2.2)$$

A densidade é o número de veículos entre o ponto A e B dividida pela distância entre A e B. A densidade mede, assim, a proximidade dos veículos na via que por sua vez afeta a liberdade de manobra e condução confortável.

2.2 Fluxo

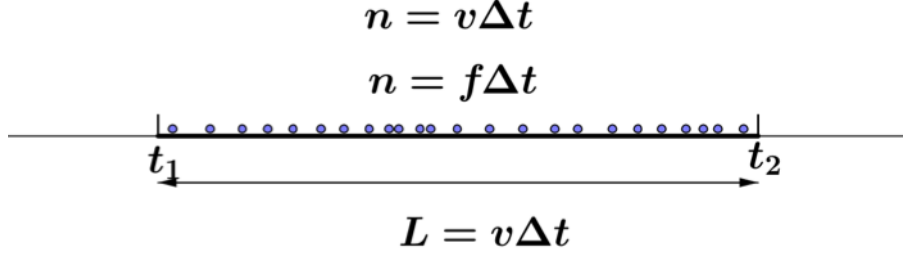


Figura 2.2: Relação entre densidade fluxo e velocidade

Uma das definições mais importantes no tráfego de veículos é o conceito de fluxo. Definimos o fluxo de forma seguinte. Para simplificar, consideremos que os veículos se deslocam num segmento de recta e suponhamos que v , ρ e f são constantes (ver Figura 2.2). Consideremos um intervalo de tempo de amplitude Δt . O número de veículos, n , no segmento de comprimento $L = v\Delta t$ é $n = \rho L = \rho v\Delta t$. Por sua vez, como $n = f\Delta t$, resulta

$$f = \rho v. \quad (2.3)$$

Se v , ρ e f dependerem do tempo, t , e do espaço, x , a fórmula (2.3) rescreve-se, naturalmente;

$$f(t, x) = \rho(t, x)v(t, x). \quad (2.4)$$

As dimensões destas variáveis são $[v] = LT^{-1}$, $[\rho] = ML^{-d}$, e $[f] = MT^{-1}L^{1-d}$, onde d denota a dimensão do espaço onde o movimento se realiza. Por exemplo, se o movimento ocorre num segmento de recta, temos $d = 1$. Do mesmo modo, $d = 2$ ou 3 , para o caso bi ou tridimensional, respectivamente. A identidade (2.4) é extremamente importante para os modelos de tráfego de veículos. As três variáveis macroscópicas estão intimamente ligados entre si. Uma relação também importante tem a ver com a relação entre a densidade e o fluxo que tratamos de seguida.

2.2.1 Curva de densidade versus fluxo

O fluxo e a densidade variam com o tempo e o local. A relação entre a densidade e o fluxo correspondente a um dado troço de estrada é conhecido por diagrama fundamental do fluxo de tráfego. Listamos abaixo algumas características que devem existir entre o fluxo e a densidade :

1. Quando a densidade é zero, o fluxo também deve ser zero
2. O aumento de número de veículos faz aumentar a densidade
3. Existe um limite máximo ρ_m para a densidade de tráfego a partir do qual a velocidade do tráfego é zero.
4. Existe um valor $\hat{\rho}$ (densidade) tal que : $0 < \hat{\rho} < \rho_m$ onde o fluxo é máximo.

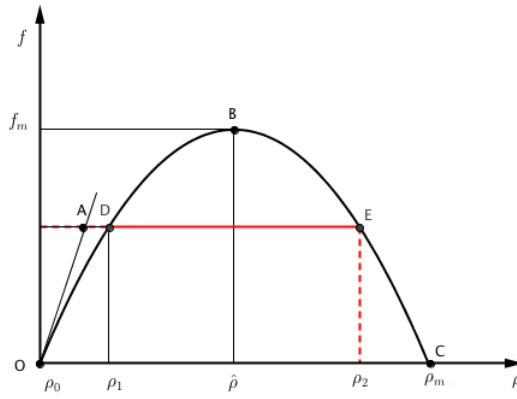


Figura 2.3: Diagrama da curva de fluxo Densidade.

2.3 Modelos de velocidade do tráfego em equilíbrio

2.3.1 Modelo de Greenshields

A relação entre a velocidade e a densidade teve várias propostas. A primeira e provavelmente a mais simples destas relações deve-se a Greenshields (Yu e Johansson, 2007; 2010). Greenshields et al. (1961) propõe uma função linear decrescente para estabelecer a relação entre a velocidade e a densidade, a saber:

$$v(\rho) = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) \quad 0 \leq \rho \leq \rho_m \quad (2.5)$$

onde v_f é velocidade de fluxo livre (velocidade onde o fluxo é máximo) e ρ_m a densidade máxima (Figura 2.4).

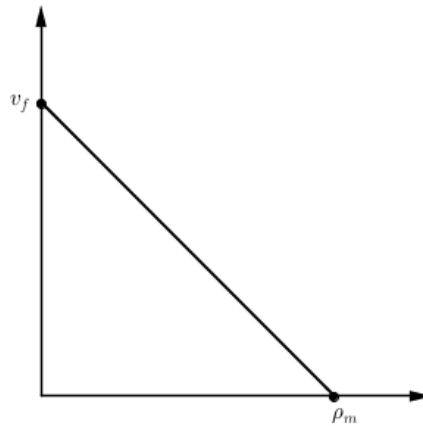


Figura 2.4: Modelo de Greenshields - densidade vs. velocidade

Podemos verificar a partir da equação (2.5), ou da Figura 2.4, que quando a densidade se aproximar de zero, a velocidade aproxima-se da velocidade de fluxo livre. Por outro lado, quando a densidade se aproxima da densidade máxima ($\rho \rightarrow \rho_m$) a velocidade tende para zero.

Uma vez definida a ligação entre a velocidade e a densidade, a relação do fluxo com a densidade fica

$$f = v_f \rho - \frac{\rho^2}{\rho_m} v_f. \quad (2.6)$$

Em relação ao que acontece na prática, (2.6) sugere o seguinte: sempre que a densidade aproxima-se de zero ($\rho \rightarrow 0$), o fluxo também aproxima-se de zero ($f \rightarrow 0$) já que a via se torna *rarefeita*; quando esta está congestionada ($\rho = \rho_m$) o fluxo é zero, já que os veículos não se movem. Além disso, como f é uma função quadrática convexa, atinge um máximo em $\hat{\rho} = \rho_m/2$. Por conseguinte, quando ρ aumenta de zero até $\hat{\rho}$, o fluxo também aumenta; mas quando ρ continua a aumentar para além de $\hat{\rho}$, aí o fluxo começa a diminuir até atingir o valor zero que é atingido quando a densidade é ρ_m .

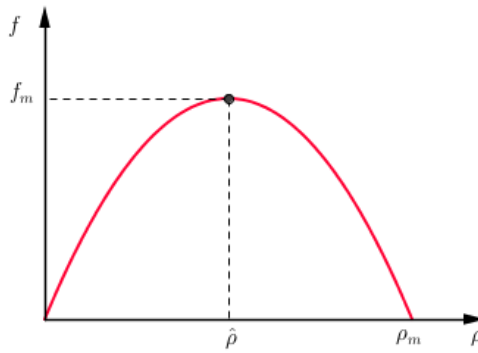


Figura 2.5: Diagrama fundamental para o modelo de Greenshields

Usando a indentidade de Greenshields (2.5), podemos eliminar o ρ de forma a obter:

$$f = \rho_m \left(v - \frac{v^2}{v_f} \right).$$

Esta função também é quadrática. Quando o fluxo se aproxima de zero temos duas hipóteses a destacar:

1. O tráfego é rarefeito de tal modo que os veículos transitam à velocidade livre ($v \rightarrow v_f$);
2. O tráfego está congestionado de tal modo que nenhum dos veículos consegue se mover ($v \rightarrow 0$).

Em termos práticos, significa que não há circulação de veículos quando a densidade é máxima e quando a densidade é zero os veículos circulam a uma velocidade livre v_f , podendo ser a média das velocidades desejadas ou máxima permitida por lei. Ainda para o modelo (2.5), da relação entre o fluxo e a densidade, ilustrada na Figura 2.5, podemos concluir que o fluxo atinge um valor máximo a uma densidade $\hat{\rho}$ e decresce até atingir o valor nulo. Isto justifica-se com o facto de $f''(\rho) = -\frac{2}{\rho_m} v_f < 0$. Analogamente podemos deduzir a relação entre o fluxo e a densidade onde v é a velocidade média na densidade ρ , v_f é a velocidade livre.

Apesar da elegância e da simplicidade do modelo de Greenshields, existem algumas limitações no modelo. Uma das falhas é a nível de precisão. Por exemplo, o modelo prediz que se $f = f_{\max}$ a densidade fica $\rho_m = \frac{1}{2}\rho$.

2.3.2 Modelo de Greenberg

Greenberg propôs uma função logarítmica para a velocidade (Yu e Johansson, 2007), dada por

$$V(\rho) = v_f \ln \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \quad 0 \leq \rho \leq \rho_m \quad (2.7)$$

análogo ao anterior, v_f é a velocidade de fluxo livre e ρ_m é a densidade máxima.

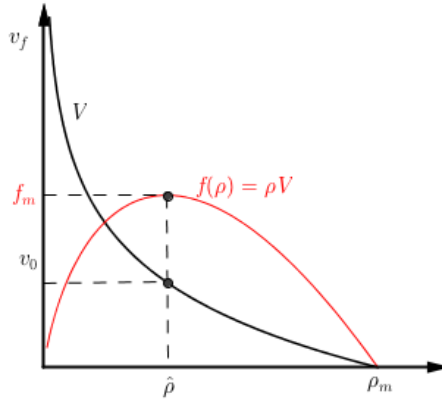


Figura 2.6: Densidade vs. velocidade (modelo de Greenberg) e o respectivo diagrama fundamental

Ilustramos na Figura 2.6 o diagrama fundamental do modelo de Greenberg. Whitam mostrou que existe uma forte correlação desta função com dados empíricos obtidos no Túnel Lincoln nos EUA e o considerou um modelo adequado. Apesar disso, podemos ver que o modelo não é adequado a baixas densidade. ($\rho \rightarrow 0 \Rightarrow v_f \rightarrow \infty$). Mostramos no Capítulo 6 que a sua expressão analítica é deduzida a partir do modelo microscópico *car-following* (modelo GM) e que $\hat{\rho} = \rho/e$ e portanto $f_m = v_f \rho/e$.

2.3.3 Modelo de Underwood

Underwood propôs a velocidade como uma função exponencial (Greenshields et al., 1961),

$$V(\rho) = v_f \exp\left(-\frac{\rho}{\hat{\rho}}\right) \quad (2.8)$$

onde v_f é a velocidade de fluxo livre e $\hat{\rho}$ é a densidade para o fluxo máximo.

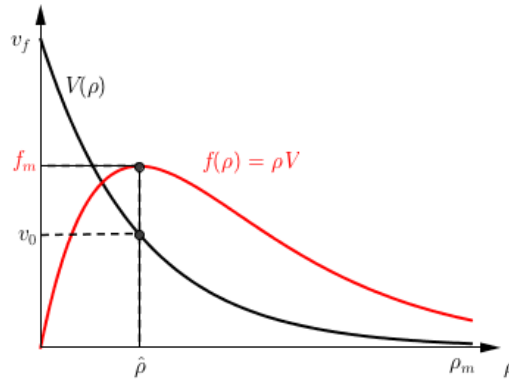


Figura 2.7: Densidade vs. velocidade (modelo de Underwood) e o respectivo diagrama fundamental

O diagrama fundamental para este modelo está ilustrada na Figura 2.7. Este modelo também é considerado adequado. Todavia, não prevê velocidade zero para densidade máxima, é inadequada para altas densidades. Se $f = f_m$ então $f'(\hat{\rho}) = 0$ e $v_0 = \frac{v_f}{e}$. Assim $f_m = \rho_0 v_f / e$ onde e é o número de Neper.

(2.9)

Morgan (2002), propôs um modelo similar calibrado a partir de dados coletados numa auto estrada nos EUA (M25)

$$V(\rho) = v_f \exp\left(-\frac{9\rho}{\hat{\rho}}\right). \quad (2.10)$$

Existem vários outros modelos propostos. Por exemplo, o modelo de difusão, que é uma extensão de Greenshields, em que a dependência se faz através da densidade tráfego e do gradiente da densidade

$$V(\rho) = v_f \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - \frac{D}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \quad 0 \leq \rho \leq \rho_m \quad (2.11)$$

onde D é o coeficiente de difusão é dada por $D = \tau v_r^2$, v_r é a velocidade aleatória e τ o parâmetro relaxação. Existem outros modelos designados por modelos multi regimes (geralmente funções definidas por ramos). Entretanto, não é o escopo do trabalho abordar estes modelos.

Capítulo 3

Leis de conservação

Quando uma determinada propriedade física é preservada no tempo durante um certo processo, estamos perante uma lei da conservação e dizemos que essa propriedade é conservada. Vamos ver neste capítulo a lei de conservação de massa e a lei de conservação de momento que são fundamentais para a dinâmica do tráfego de veículos no contexto macroscópico.

Apresentamos uma breve descrição da dedução da lei da conservação da massa para o caso unidimensional, no caso bidimensional e sua generalização para o caso geral (n dimensional) e dedução da lei da conservação de momento.

3.1 Lei da conservação de massa

3.1.1 Lei da conservação da massa no caso unidimensional

A Figura 3.1, ilustra o fluxo de um campo escalar $\rho(t, x)$ através do segmento $[x_1, x_2]$. Sejam $f(t, x_1) = \rho(t, x_1)v(t, x_1)$ o fluxo que atravessa a fronteira em $x = x_1$ e $f(t, x_2) = \rho(t, x_2)v(t, x_2)$ o fluxo que sai em $x = x_2$. A lei da conservação da massa diz que a variação da quantidade de massa ($\rho(t, x)$) em $[x_1, x_2]$, no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é igual a diferença entre o fluxo que entra e o fluxo que sai.

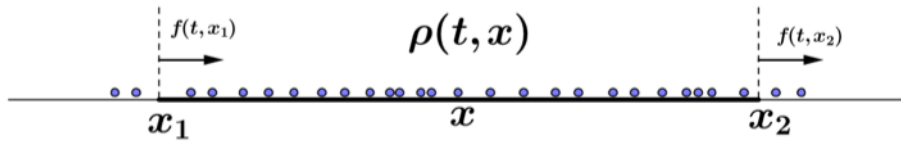


Figura 3.1: Lei da conservação da massa no caso unidimensional

Podemos deduzir a formulação matemática que traduz esta lei de forma que se segue. A massa na região compreendida entre $x = x_1$ e $x = x_2$ no instante t é dado por

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx. \quad (3.1)$$

A quantidade total de massa que atravessa a fronteira (i.e., o fluxo total que entra em $x = x_1$) é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_1) v(t, x_1) dt. \quad (3.2)$$

A quantidade total de massa que sai pela fronteira (i.e., o fluxo total que sai em $x = x_2$) é dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_2) v(t, x_2) dt. \quad (3.3)$$

Aplicando o princípio obtemos que

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(t_1, x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_1) v(t, x_1) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_2) v(t, x_2) dt \quad (3.4)$$

de onde obtemos a **forma integral**

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx = \rho(t, x_1) v(t, x_1) - \rho(t, x_2) v(t, x_2) \quad (3.5)$$

onde $\rho(t, x)$ é densidade (podendo ser o número de veículos por unidade comprimento de $[x_1, x_2]$). O integral de $\rho(t, x)$ dá-nos a massa (o número de veículos entre x_1 e x_2). Podemos rescrever a equação (3.4) na forma

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho(t_2, x) - \rho(t_1, x)] dx = \int_{t_1}^{t_2} [\rho(t, x_1) v(t, x_1) - \rho(t, x_2) v(t, x_2)] dt \quad (3.6)$$

Se $\rho(x, t)$ e $v(x, t)$ forem funções diferenciáveis, temos que

$$\rho(t_2, x) - \rho(t_1, x) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) dt \quad (3.7)$$

$$\rho(t, x_2) v(t, x_2) - \rho(t, x_1) v(t, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x) v(t, x)) dx. \quad (3.8)$$

Usando (3.7) e (3.8) em (3.4) obtemos a equação:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(t, x) v(t, x)] \right] dt dx = 0 \quad (3.9)$$

como a equação (3.9) é válida para todos valores em x obtemos a **forma diferencial**

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = 0 \quad (3.10)$$

onde $f(t, x) = \rho(t, x) v(t, x)$, ou

$$\rho_t + f_x(t, x) = 0 \quad (3.11)$$

onde usamos a notação $(\cdot)_\phi = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \phi}$.

3.1.2 Lei da conservação de massa em duas dimensões

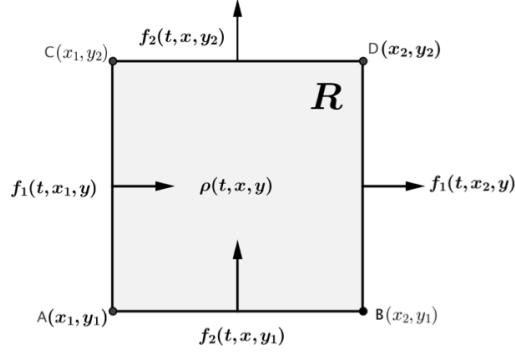


Figura 3.2: Conservação de massa no caso bidimensional

Consideremos a Figura 3.2. Seja f_1 o fluxo segundo a direcção de x e f_2 o fluxo segundo a direcção de y . Designemos por $v_1(t, x, y)$ a velocidade do fluido na direcção x e $v_2(t, x, y)$ a velocidade do fluido na direcção y . Obtemos a seguinte relação entre as velocidades e os fluxos

$$f_1(t, x, y) = \rho(t, x, y)v_1(t, x, y) \quad (3.12)$$

$$f_2(t, x, y) = \rho(t, x, y)v_2(t, x, y) \quad (3.13)$$

A massa na região R definida pelos vértices A , B , C e D é dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho(t, x, y) dy dx. \quad (3.14)$$

A massa total que entra na região em $x = x_1$ é dada por

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_1, y) v_1(t, x_1, y) dt dy \quad (3.15)$$

e a massa que sai da região em $x = x_2$ é dada por

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_2, y) v_1(t, x_2, y) dt dy. \quad (3.16)$$

A massa total que entra na região em $y = y_1$ é dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x, y_1) v_2(t, x, y_1) dt dx \quad (3.17)$$

e a massa total que sai da região em $y = y_2$ é dada por

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x, y_2) v_2(t, x, y_2) dt dx. \quad (3.18)$$

A lei da conservação da massa, em duas dimensões, diz que a variação de massa na região R no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é igual a diferença da quantidade que entra pela fronteira e o que sai pela

fronteira. Ou seja, temos que

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho(t_2, x, y) dy dx - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho(t_1, x, y) dy dx \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_1, y) v_1(t, x_1, y) dt dy - \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_2, y) v_1(t, x_2, y) dt dy \end{aligned}$$

Do mesmo modo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \rho(t, x, y) dx dy &= \int_{y_1}^{y_2} \rho(t, x_1, y) v_1(t, x_1, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} \rho(t, x_2, y) v_1(t, x_2, y) dy \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x_1, y) v_2(t, x_1, y) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x, y_2) v_2(t, x, y_2) dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por outro lado, podemos escrever a equação (3.19) na forma

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} [\rho(t_2, x, y) - \rho(t_1, x, y)] dy dx \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{t_1}^{t_2} [\rho(t, x_1, y) v_1(t, x_1, y) - \rho(t, x_2, y) v_1(t, x_2, y)] dy dt \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} [\rho(t, x, y_1) v_1(t, x, y_1) - \rho(t, x, y_2) v_2(t, x, y_2)] dx dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se considerarmos $\rho(t, x, y)$, $v_1(t, x, y)$ e $v_2(t, x, y)$ vamos obter

$$\rho(t_2, x, y) - \rho(t_1, x, y) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x, y) dt \quad (3.21)$$

$$\rho(t, x_2, y) v_1(t, x_2, y) - \rho(t, x_1, y) v_1(t, x_1, y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(t, x, y) v_1(t, x, y)] dx \quad (3.22)$$

$$\rho(t, x, y_2) v_2(t, x, y_2) - \rho(t, x, y_1) v_2(t, x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} (\rho(t, x, y) v_2(t, x, y)) dy. \quad (3.23)$$

Substituindo (3.21), (3.22) e (3.23) em (3.19) obtemos a equação seguinte.

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x, y) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(t, x, y) v_1(t, x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(t, x, y) v_2(t, x, y)] \right\} dt dx dy = 0. \quad (3.24)$$

Sabendo que a igualdade é válida em todo intervalo de tempo e para quaisquer valores de x e de y , obtemos a lei da conservação da massa no caso bidimensional.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x, y) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(t, x, y) v_1(t, x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(t, x, y) v_2(t, x, y)] = 0 \quad (3.25)$$

Em termos de fluxos, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x, y) + \frac{\partial}{\partial x} f_1(t, x, y) + \frac{\partial}{\partial y} f_2(t, x, y) = 0 \quad (3.26)$$

ou na forma de divergência

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x, y) + \nabla \cdot f(t, x, y) = 0. \quad (3.27)$$

3.1.3 Lei da conservação de massa no caso n -dimensional

Consideremos a densidade $\rho(x, t)$, a velocidade $v(t, x) \in \mathbb{R}^n$ e o fluxo $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ onde $x \in \mathbb{R}^n$. A lei da conservação da massa é dada por

$$\rho_t + \nabla \cdot f(t, x) = 0. \quad (3.28)$$

3.2 Conservação de momento

3.2.1 Lei da conservação do momento no caso unidimensional

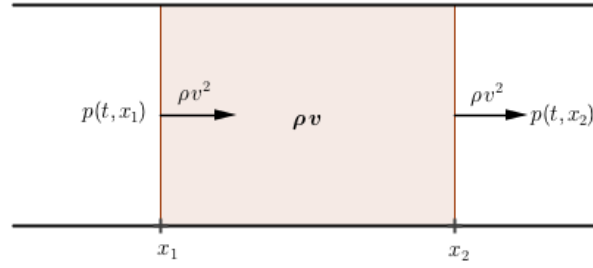


Figura 3.3: Lei da conservação do momento

Na Figura 3.3, ilustramos o fluxo de momento na secção $[x_1, x_2]$ dado pelo produto entre a densidade $\rho(t, x)$ e a velocidade $v(t, x)$. Análoga ao caso de conservação de massa, o fluxo para o momento é dado pelo produto entre o momento e a velocidade, i.e. $\rho(t, x)v^2(t, x)$. Pela segunda lei de Newton, a variação do momento é igual a força aplicada. A força é a pressão vezes a área. Tomando a área como unidade de medida, obtemos $p(t, x_1)$ (na fronteira à esquerda) e $p(t, x_2)$ (na fronteira à direita). Aplicando a segunda lei de Newton na secção, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(t, x)v(t, x)] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(t, x)v^2(t, x) + p(t, x)] = 0. \quad (3.29)$$

3.2.2 Lei da conservação do momento no caso bidimensional

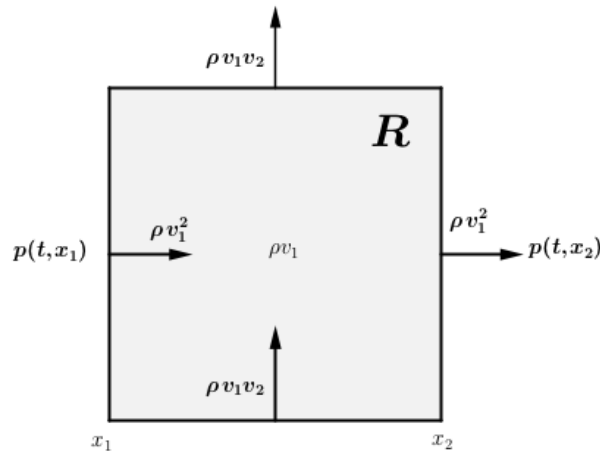


Figura 3.4: Lei da conservação do momento no caso bidimensional

Na Figura 3.4, ilustramos dois campos de momento. O momento na direcção x é dado por $\rho(t, x, y)v_1(t, x, y)$ e o momento na direcção y dado por $\rho(t, x, y)v_2(t, x, y)$. O fluxo na direcção x deve-se a velocidade na direcção x (i.e., $v_1(t, x, y)$) que traduz-se no produto da velocidade pelo momento ($\rho(t, x, y)v_1^2(t, x, y)$). Analogamente, o fluxo na direcção y é $\rho(t, x, y)v_1(t, x, y)v_2(t, x, y)$.

Pela 2.^a Lei de Newton, a variação total do fluxo na direcção x é igual a força na direcção x . Obtemos assim que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x, y)v_1(t, x, y) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(t, x, y)v_1^2(t, x, y) + p(t, x, y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(t, x, y)v_1(t, x, y)v_2(t, x, y)] = 0. \quad (3.30)$$

Se ignorarmos as dependências em (t, x, y) vamos obter a equação para o momento nas direcções x e y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_1 v_2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_2^2 + p) &= 0, \end{aligned}$$

onde $\rho = \rho(t, x, y)$, $v_1 = v_1(t, x, y)$ e $v_2 = v_2(t, x, y)$.

Capítulo 4

Modelos macroscópicos para o tráfego de veículos

4.1 Modelos macroscópicos unidimensionais

Existem vários modelos propostos para explicar a teoria do tráfego de veículos. O primeiro modelo proposto consiste em uma equação, os restantes modelos incorporam duas equações. Além disso, todos os modelos incluem a equação:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (4.1)$$

onde $v(x, t)$ é a velocidade. Consideramos que a densidade aqui é a *massa* (quantidade dos veículos por km num dado instante t). Admitimos que os veículos se deslocam da esquerda para a direita num fluxo contínuo, ou seja, consideramos que a função $f(x, t) = \rho(x, t)v(x, t)$ é uma função contínua. Todos esses modelos são descritos por equações diferenciais às derivadas parciais, no tempo e no espaço.

O processo da evolução do tráfego consiste em avaliar como as grandezas físicas do tráfego (velocidade densidade e fluxo) se evoluem ao longo do tempo t e do espaço x dadas condições iniciais ($\rho_0 = \rho(x, 0)$) e condições de fronteiras ($f(t) = f(x_0, t)$).

Neste Capítulo vamos estudar quatro modelos macroscópicos: o modelo LWR, o modelo PW, o modelo de Zhang e o modelo de Aw-Rascle.

4.1.1 O Modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR)

Lighthill e Whitham (1955a) e Richards (1956), propuseram um modelo macroscópico para descrever o tráfego em uma dimensão. O Modelo é descrito por uma única equação diferencial parcial baseada na lei da conservação da massa (2.4), e cuja densidade de tráfego é a quantidade conservada. A equação dinâmica para o modelo deriva do seguinte:

$$\begin{cases} \rho_t(t, x) + (\rho v)_x = 0, \\ f = \rho v \\ v = V(\rho) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde o ρ é a densidade de tráfego, o fluxo é $\rho V(\rho)$ e $v = V(\rho)$ é a velocidade associada a densidade ρ dado por (2.5). Combinando as três equações obtemos o modelo LWR:

$$\rho_t(t, x) + (\rho V(\rho))_x = 0 \quad (4.3)$$

A equação do modelo é uma equação diferencial parcial hiperbólica escalar, não linear e variante no tempo. De realçar que ser hiperbólico é desejável uma vez que conhecidas as condições iniciais e fronteiras é suficiente para se conhecer a evolução no tempo e no espaço.

O modelo é anisotrópico em si, na medida em que o comportamento de um veículo é afetado somente pelo veículo da frente. Pois, usando o modelo de Greenshields para a função velocidade, na função do fluxo ($f = \rho v$), e derivando obtém-se que:

$$f'(\rho) = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho) = V(\rho) + \rho V'(\rho), \quad (4.4)$$

o que leva a concluir que a velocidade das ondas, obtidas da solução da equação, não são maiores do que a velocidade do fluxo do tráfego já que $0 < f'(\rho) < V(\rho)$, sendo que $V'(\rho) = -\frac{v_f}{\rho_m}$.

Neste modelo a velocidade depende somente do parâmetro densidade, ρ . Isto significa que qualquer perturbação na densidade, reflete na velocidade. Este facto, confere algumas desvantagens ao modelo. A questão é que na prática a mudança de densidade não acontece de forma instantânea.

Segundo Daganzo (1995), o modelo não consegue descrever corretamente o comportamento dos veículos nos semáforos, com passagem permitida, porque não reconhece que existe uma distribuição de velocidades desejadas entre veículos, que é diferente para cada veículo. Dada uma certa densidade, a velocidade é fixada sem que o modelo reconheça a distância entre os veículos. Por outro lado, ainda segundo Daganzo, o modelo não descreve de forma adequada o movimento dos veículos quando há congestionamento e não prevê as instabilidades do tipo *pára-arranca*.

4.2 Modelos de duas equações

Os modelos de duas equações, também conhecidos por modelos de segunda ordem, incorporam a equação resultante da lei da conservação da massa e outra equação baseada na lei da conservação do momento.

4.2.1 Modelo Payne-Whitham (PW)

O primeiro modelo de duas equações foi proposto por Payne e Whitham (1974). Admitindo similaridades entre o fluxo do tráfego de fluidos compressíveis, conceberam um modelo com base nas equações de Navier-Stokes para fluidos compressíveis unidimensionais. O modelo inicial é dado por (4.5).

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0 \\ v_t - vv_x &= \frac{V(\rho) - v}{\tau} - \frac{(A(\rho))_x}{\rho} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $V(\rho)$ é a velocidade do tráfego em estado de equilíbrio. vv_x descreve a variação da velocidade em determinado local da via. τ é o tempo de relaxação, $\frac{V(\rho) - v}{\tau}$ é chamado de termo de relaxamento, descreve a tendência de uma aproximação da velocidade v com a velocidade de equilíbrio para alguma densidade. $\frac{(A(\rho))_x}{\rho}$ é chamado de termo de antecipação, leva em conta a sensibilização dos condutores para a condição de trânsito mais à frente.

Para eliminar a formação de algumas ondas de choque irrealista, Kerner e Konhäuser (1994)

acrescentaram o termo de viscosidade $\frac{\mu v_{xx}}{\rho}$ e Zhang (2002) propôs $A(\rho) = c_0^2 \rho$. Com estas mudanças o modelo ganhou a seguinte forma:

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (4.6)$$

$$v_t + vv_x = \frac{V(\rho) - v}{\tau} - \frac{(c_0^2 \rho)_x}{\rho} + \mu v_{xx}. \quad (4.7)$$

O estudo do modelo requer a determinação dos valores próprios. Para isto vamos deduzir a forma conservativa para o modelo. A primeira equação já está na forma conservativa, bastando assim rescrever (4.7) na forma conservativa através de manipulações algébricas que se seguem. Consideramos a regra da derivada do produto

$$(\rho v)_t = \rho v_t + v \rho_t. \quad (4.8)$$

Multiplicando (4.6) por v e substituindo o valor de $v \rho_t$ obtemos

$$v(\rho v)_x + (\rho v)_t - \rho v_t = 0. \quad (4.9)$$

Multiplicando (4.7) por ρ obtemos

$$\rho v_t + \rho v v_x = \rho \frac{(V(\rho) - v)}{\tau} - C_0^2 \rho_x + \mu v_{xx}$$

assim substituindo ρv_t em (4.9) obtemos

$$v(\rho v)_x + (\rho v)_t + \rho v v_x = \rho \frac{(V(\rho) - v)}{\tau} - C_0^2 \rho_x + \mu v_{xx} \quad (4.10)$$

Usando a regra do produto para $(\rho v)_x = (\rho v)_x v + (\rho v)_x v_x$ e substituindo em (4.10) obtemos o lado esquerdo na forma conservativa onde ρ e ρv são as quantidades conservadas

$$(\rho v)_t + (\rho v^2 + c_0^2 \rho)_x = \rho \frac{V(\rho) - v}{\tau} + \mu v_{xx}. \quad (4.11)$$

Podemos, ainda, escrever o sistema na forma matricial

$$u_t + f(u)_x = S \quad (4.12)$$

onde

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}, f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + c_0^2 \rho \end{pmatrix} \text{ e } S = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \frac{V(\rho) - v}{\tau} + \mu v_{xx} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Fazendo $S = 0$, podemos rescrever o sistema na forma *quasi-linear*,

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (4.14)$$

onde

$$A(u) = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c_0^2 - \rho v^2 & 2v \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Fazendo $|A - \lambda I| = 0$ obtemos os valores próprios distintos

$$\lambda_{1,2} = v \pm C_0 \quad (4.16)$$

e portanto o sistema é estritamente hiperbólico.

Daganzo (1995) criticou o modelo PW argumentando que está demasiadamente preso à teoria do fluxo dos fluídos, onde uma partícula é influenciada pelas outras partículas que o rodeiam. Não preserva a propriedade anisotrópica. O modelo permite velocidades negativas para os veículos e, como consequência, possibilita um movimento contra o próprio fluxo do trânsito. Isto deve-se ao facto de um dos valores próprios ser sempre superior à velocidade do tráfego v . Nos sistemas hiperbólicos os valores próprios da matriz jacobiana são as velocidades das ondas do sistema. Assim, o comportamento dos veículos está também fortemente ditada pelo comportamento do veículo que transita por trás, contrariando assim a natureza anisotrópica observadas no fluxo de tráfego. Outra questão, levantada por Daganzo, tem a ver com a diferença do comportamento entre veículos e partículas. O comportamento dos veículos é diferente na medida em que uns podem ser mais pacíficos do que outros.

4.2.2 Modelo de Zhang

Zhang (1998) desenvolveu um modelo semelhante ao PW mas suprimindo algumas falhas. O modelo preserva a propriedade anisotrópica, porque a sua equação de momento

$$v_t + vv_x = -C(\rho)v_x, \quad (4.17)$$

é derivada do modelo *car-following* (a tratar no Capítulo 5) dada na forma

$$\tau(s_n(t))\ddot{x}_n(t) = \dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t), \quad (4.18)$$

onde

$$s_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t), \quad (4.19)$$

e $s_n(t)$ é uma função do espaçamento entre veículos, $x_n(t)$, $\dot{x}_n(t)$, e $\ddot{x}_n(t)$ é a posição a velocidade e aceleração do n -ésimo veículo respectivamente. $\tau(s_n(t))$ é o tempo médio de resposta do condutor. Para derivar (4.17) começa-se por introduzir o campo de velocidades $v(x, t) : \dot{x}_n(t) = v(x_n(t), t)$ e *headway* $s_n(x, t) : s_n(t) = s(x_n(t), t)$. Assim, (4.17) expressa-se em

$$\tau(s(x(t), t)) \frac{dv(x(t), t)}{dt} = \frac{d(s(x(t), t))}{dt}, \quad (4.20)$$

onde usando a derivada convectiva $\frac{D}{Dt} = \partial_t + v\partial_x$ na componente da velocidade, obtemos que

$$\tau(s)(v_t + vv_x) = (s_t + vs_x). \quad (4.21)$$

onde $v = v(x(t), t)$ e $s = s(x(t), t)$.

Pela lei da conservação da massa, considerando que $\rho = \frac{1}{s}$, e usando a seguinte derivada

$$D_x \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{gD_x f - fD_x g}{g^2} \quad (4.22)$$

com $g \neq 0$, obtemos que

$$s_t + vs_x = sv_x. \quad (4.23)$$

Substituindo o lado direito da equação (4.21), obtemos a forma desejada

$$v_t + vv_x = \frac{s}{\tau(s)}v_x, \quad (4.24)$$

onde

$$\frac{s}{\tau(s)} = -C(\rho) \equiv -\rho V'(\rho) \geq 0$$

é a velocidade do som do tráfego descrito em Zhang (1998). Portanto, o modelo completo é dado por

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (4.25)$$

$$v_t + [v + \rho V'(\rho)] v_x = 0. \quad (4.26)$$

Para mostrar que o sistema é hiperbólico vamos escrevê-lo na forma conservativa. Para isso, expandimos a equação (4.25) obtendo

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0. \quad (4.27)$$

De (4.27) obtemos que $\rho v_x = -\rho_t - v\rho_x$. Substituindo ρv_x na equação (4.26) obtemos

$$v_t + vv_x + V'(\rho)(-\rho_t - v\rho_x) = 0. \quad (4.28)$$

Podemos rescrever (4.28) como

$$v_t + vv_x + (V(\rho))_t - v(V(\rho))_x = 0, \quad (4.29)$$

ou ainda

$$(v - V(\rho))_t + v(v - V(\rho))_x = 0. \quad (4.30)$$

Considerando a regra de produto

$$[\rho(v - V(\rho))]_t = \rho(v - V(\rho))_t + (v - V(\rho))\rho_t \quad (4.31)$$

$$[\rho v(v - V(\rho))]_x = \rho v(v - V(\rho))_x + (v - V(\rho))(\rho v)_x \quad (4.32)$$

Multiplicando (4.30) por ρ , obtemos

$$\rho(v - V(\rho))_t + \rho v(v - V(\rho))_x = 0 \quad (4.33)$$

Substituindo em (4.33), os resultados que se obtém de $\rho(v - V(\rho))_t$ e $\rho v(v - V(\rho))_x$ em (4.31) e (4.32) respectivamente, obtemos que

$$(\rho(v - V(\rho)))_t - (v - V(\rho))\rho_t + (\rho v(v - V(\rho)))_x - (v - V(\rho))(\rho v)_x = 0. \quad (4.34)$$

Simplificando obtemos

$$(\rho(v - V(\rho)))_t + (\rho v(v - V(\rho)))_x - (v - V(\rho))(\rho_t + (\rho v)_x) = 0. \quad (4.35)$$

Usando o resultado da primeira equação do modelo, $\rho_t + (\rho v)_x = 0$, obtemos a forma conservativa

$$(\rho(v - V(\rho)))_t + (\rho v(v - V(\rho)))_x = 0, \quad (4.36)$$

onde o que se conserva é ρ e $\rho(v - V(\rho))$.

Se consideramos a variável $m = \rho(v - V(\rho))$, o modelo pode ser escrito na forma

$$\rho_t + (m + \rho V(\rho)) = 0 \quad (4.37)$$

$$m_t + \left[\frac{m^2}{\rho} + mV(\rho) \right]_x = 0. \quad (4.38)$$

Considerando $u = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}$ e $f(u) = \begin{pmatrix} m + \rho V(\rho) \\ \frac{m^2}{\rho} + mV(\rho) \end{pmatrix}$ obtemos a forma matricial

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (4.39)$$

e a forma *quasi-linear*

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad (4.40)$$

onde

$$A(u) = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \rho V'(\rho) + V(\rho) & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} + mV'(\rho) & \frac{2m}{\rho} + V(\rho) \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Fazendo $|A(u) - \lambda I| = 0$ obtemos valores próprios distintos

$$\lambda_1 = v \text{ e } \lambda_2 = v + \rho V'(\rho), \quad (4.42)$$

o que mostra que o sistema é hiperbólico. Por outro lado, ela é anisotrópica desde que $V(\rho)$ seja uma função monótona decrescente.

4.2.3 Modelo Aw-Rascle (AR).

Aw e Rascle (2000) propuseram o modelo alternativo ao modelo PW. Para estes autores, os modelos anteriores estavam demasiados presos à dinâmica de fluidos de tal que modo que não conferiam diferenças significativas com o tráfego de veículos. Entenderam que o problema de modelo PW, que consiste em permitir a informação de forma mais rápida do que o fluxo, tem a ver com o termo de antecipação incluído que envolve a derivada da pressão. Para corrigir esta deficiência eles sugeriram que esta dependência deve ser feita em termos da derivada convectiva do termo da pressão

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\phi \quad (4.43)$$

onde $\phi(\vec{x}, t)$ e $\vec{x} \in R^n$. O modelo consiste no seguinte sistema em que a primeira equação é a lei da conservação da massa e a segunda é a equação lagrangiana.

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (4.44)$$

$$[v + P(\rho)]_t + v[v + P(\rho)]_x = 0 \quad (4.45)$$

onde o termo da pressão toma a expressão $P(\rho) = c_0^2 \rho^\gamma$ $\gamma > 0$, e $c_0 = 1$. A escolha para a pressão garante a propriedade anisotrópica para o modelo.

Para obter a forma conservativa do modelo, consideramos a equação (4.45) multiplicado por ρ . Assim, usando a regra do produto

$$(\rho(v + P))_t = \rho(v + P)_t + (v + P)\rho_t \quad (4.46)$$

$$(\rho v(v + P))_x = \rho v(v + P)_x + (v + P)(\rho v)_x \quad (4.47)$$

obtemos

$$(\rho(v + P))_t - (v + P)\rho_t + (\rho v(v + P))_x - (v + P)(\rho v)_x = 0. \quad (4.48)$$

Podemos simplificar (4.48) de forma a obter

$$(\rho(v + P))_t + (\rho v(v + P(\rho)))_x - (v + P(\rho)) [\rho_t + (\rho v)_x] = 0 \quad (4.49)$$

Usando identidade (4.44) em (4.49) obtemos a forma conservativa

$$(\rho(v + P))_t + (\rho v(v + P))_x = 0 \quad (4.50)$$

onde as quantidades conservadas são ρ , e $\rho(v + P(\rho))$.

Fazendo $m = \rho(v + P(\rho))$ e obtemos

$$\begin{aligned} \rho_t + (m - \rho P)_x &= 0 \\ m_t + \left[\frac{m^2}{\rho} - mP \right]_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Podemos considerar a forma matricial

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (4.52)$$

onde

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} \text{ e } f(u) = \begin{pmatrix} m - \rho P \\ \frac{m^2}{\rho} - mP \end{pmatrix},$$

,de onde obtemos a forma *quasi-linear*

$$u_t + A(u)u_x = 0 \quad (4.53)$$

onde

$$A(u) = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} -(\gamma + 1)p & 1 \\ -\frac{m^2}{\rho^2} - \frac{\gamma m P(\rho)}{\rho} & \frac{2m}{\rho} - P \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

e os dois valores próprios da matriz são

$$\lambda_1 = v \text{ e } \lambda_2 = v - \gamma P. \quad (4.55)$$

De realçar que o sistema é hiperbólico, já que os valores próprios são reais e distintos. Além disso, o modelo é anisotrópico, pois a velocidade máxima das ondas do sistema nunca é superior à velocidade do tráfego.

Capítulo 5

Modelos microscópicos para tráfego de veículos

A abordagem microscópica, diferente da abordagem macroscópica, analisa o tráfego veículo a veículo e as suas respectivas interações. Aqui, os veículos são considerados como partículas sem massa. De entre estes modelos, destacam-se os modelos *car-following* e os autômatos celulares. Aqui, consideraremos somente o primeiro destes modelos.

A ideia central é escrever a aceleração (desaceleração, no caso negativo) do i -ésimo veículo como resposta ao um conjunto de estímulos. Estes estímulos determinam a performance e a diferença entre os vários modelos. Podem incluir a sensibilidade do condutor, a velocidade/distância relativa, etc..

Os modelos clássicos são conhecidos por modelos GM (*General Motors*) propostos inicialmente por Gazis et al. (1959) no laboratório de investigação de *General Motors* em Detroit (Brackstone and McDonald, 1999). Este modelo baseia-se no modelo *follow-the-leader* proposto por Pipes (1953).

Bando et al. (1995) propôs um modelo baseado na ideia de que o fluxo do tráfego é regulado pela velocidade ótima de cada veículo. Esse modelo é conhecido por modelo velocidade ótima.

Neste Capítulo vamos fazer uma breve revisão sobre sobre estes dois modelos propostos e apresentaremos alguns resultados (com discussão) de simulações numéricas no Capítulo 7.

5.1 Breves notações

Antes de introduzirmos os modelos, vamos considerar algumas notações usadas na descrição dos modelos da teoria do *car-following*.

De acordo com a Figura (5.1) designamos por *leading-car* (líder) o $(i+1)$ -ésimo veículo e *following-car* (seguidor) o i -ésimo veículo. Consideramos ainda que:

- os veículos estão ordenados de tal modo que, o i -ésimo veículo segue o $(i+1)$ -ésimo veículo e, portanto, o veículo $(i+1)$ -ésimo precede o i -ésimo.
- $x_n(t)$ e $\dot{x}_n(t)$ são a posição e a velocidade do n -ésimo veículo no instante t .
- τ é o tempo de atraso (ou de reacção) de um condutor. Este tempo é um valor típico (ou característico) e representa o tempo médio que um condutor leva para reagir a um determinado

estímulo. Por exemplo, assumindo que o *leading-car* possui uma velocidade de acordo com $v_{leader} = v_0(t)$ e o *following-car* replica a velocidade do líder com atraso τ , então $v_{follower} = v_0(t - \tau)$.

- $\ddot{x}_n(t + \tau)$ é a aceleração do *following-car* no instante $t + \tau$.
- $b_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ é o *headway* (distância para o veículo da frente) do i -ésimo veículo (distância do i -ésimo veículo ao seu precedente). Por exemplo na Figura 5.1 o *headway* do *following-car* é $b = x_{i+1} - x_i$.

5.2 Modelo *car-following*

O modelo tem como conceito base a relação entre o estímulo e a resposta e como objectivo descrever como um veículo segue o outro. Cada condutor controla o seu veículo em função do estímulo que recebe do veículo que o precede.

O modelo descreve a relação entre a variação da velocidade de um veículo, chamado seguidor (*following-car*), em resposta ao estímulo que recebe de um veículo que o precede, designado por *leading-car* (líder). De um modo geral, considera-se que para o n -ésimo veículo ($n = 1, 2, \dots$) a resposta é proporcional ao estímulo e sumariza-se pela seguinte relação (Li e Sun 2012):

$$[Resposta]_n \propto [Estimulo]_n. \quad (5.1)$$

No exemplo da Figura 5.1 consideramos dois veículos consecutivos deslocando sobre um eixo OX num determinado instante t em que $(i + 1)$ -ésimo veículo é o *leading-car* e i -ésimo veículo o *following-car*. O condutor do veículo i que segue o $(i + 1)$ -ésimo veículo ($i = 1, \dots, N - 1$) acelera (ou desacelera) em função do estímulo que recebe do $(i + 1)$ -ésimo veículo.

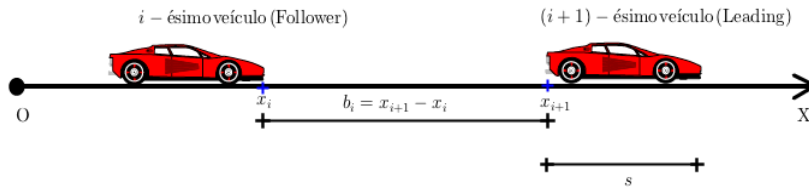


Figura 5.1: Diagrama cinemática do modelo *car-following*

Existem vários modelos *car-following* propostos para descrever o comportamento dos veículos. Os modelos diferem de acordo com os estímulos incorporados. De um modo geral, estes estímulos incluem, a velocidade do veículo, a aceleração do veículo, a velocidade e/ou a distância para o seu *leading-car* (*headway*), a sensibilidade do condutor e ainda o número de veículos. A resposta é a aceleração do veículo actual.

De um modo geral, consideramos que os veículos se movem numa linha e não há ultrapassagens. O tráfego é *anisotrópico*, ou seja, os condutores apenas reagem as variações do comportamento que recebem do veículo que os precede.

5.2.1 Modelo *general motor* (GM)

Chandler et al. (1958) propôs um modelo que serviu de base para a *família* de modelos denominados modelos GM. Este modelo baseia-se no modelo inicial conhecido por *follow-the-leader*. Este modelo

deve-se a Pipes (1953) e baseia-se em dois princípios fundamentais:

1. quando maior é a velocidade do veículo, maior será a distância entre veículos;
2. para evitar a colisão, o condutor deve manter uma distância de segurança em relação ao veículo da frente.

A equação para a dinâmica do modelo obtém-se de forma seguinte. Seja $\Delta x_n(t)$ o *headway* do n -ésimo veículo, Δx_s a distância de segurança, $v_n(t)$ e $v_{n+1}(t)$ as velocidades, do n -ésimo e $(n+1)$ -ésimo veículo, respectivamente. A distância segura (o espaço mínimo necessário) é dada por:

$$\Delta x_n(t) = \Delta x_s + \tau v_n(t) \quad (5.2)$$

onde τ é o tempo de reacção. A equação (5.2) pode ser escrita de forma seguinte,

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \Delta x_s + \tau v_n(t). \quad (5.3)$$

Derivando (5.3) em ordem ao tempo, obtemos

$$\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t) = \tau a_n(t). \quad (5.4)$$

Finalmente, obtemos de (5.4)

$$a_n(t) = \frac{1}{\tau} [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)]. \quad (5.5)$$

O modelo assume que existe uma forte correlação entre a resposta do condutor (aceleração ou desaceleração) e a velocidade relativa do veículo que o precede. Baseado neste modelo desenvolveu-se o modelo conhecido por *General Motor* (GM).

Chandler et al. (1958) foi o primeiro a propor um modelo linear baseando no conceito de estímulo resposta. A resposta do condutor é proporcional ao estímulo que ele percebe. Esta resposta obtém-se com um atraso τ . Neste modelo o único estímulo é a velocidade relativa e λ é o factor de proporcionalidade. Cada veículo tende a mover-se a uma velocidade igual ao do veículo que o precede. O modelo possui a seguinte formulação

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = \lambda(\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)), \quad n = 1, \dots, N \quad (5.6)$$

onde :

- λ é o parâmetro de sensibilidade. Em (Helbing e Tilch 1998a) tomaram-no como constante, enquanto que em (Herman e Potts, 1961) tomaram-no como

$$\lambda = \begin{cases} a : & \Delta x_n(t) < x_c \\ b : & \Delta x_n(t) \geq x_c \end{cases}$$

onde a , b e x_c são constantes e $x_n(t)$ é a posição do n -ésimo veículo.

- $\ddot{x}_n(t + \tau)$ é a aceleração do n -ésimo veículo no instante $(t + \tau)$;
- $\dot{x}_n(t)$ é a velocidade do n -ésimo veículo no instante t ;
- $\dot{x}_n(t)$ é a aceleração do n -ésimo veículo no instante t .

O modelo assume que a taxa de aceleração (ou desaceleração) é uma função do parâmetro de sensibilidade e estímulo. O estímulo presente no modelo é a velocidade relativa *do leading-car* (i.e. a diferença entre a velocidade do *following-car* e do *leading-car*).

Apesar da elegância o modelo contém muitas limitações. Quando a velocidade do *following-car* e o *leading-car* forem iguais, a resposta da aceleração (ou desaceleração) do modelo é zero, independentemente da distância entre os veículos ou a densidade de tráfego. Assim, não consegue prever a distinção entre cenários cuja velocidade relativa é a mesma para os veículos (*following-car* e *leading-car*) mas as distâncias relativas diferentes. Por exemplo, o modelo prevê a mesma aceleração para os seguintes cenários:

- $\dot{x}_i(t) = 80 \text{ km/h}$, $\dot{x}_{i+1}(t) = 60 \text{ km/h}$ e $b_i(t) = 50 \text{ m}$.
- $\dot{x}_j(t) = 80 \text{ km/h}$, $\dot{x}_{j+1}(t) = 60 \text{ km/h}$ e $b_j(t) = 1000 \text{ m}$.

A aceleração é igual em ambos os casos, o que não é o que se espera na prática. No Capítulo 6 indicaremos outros pontos fracos deste modelo.

Herman et al. (1959) discutiu a análise de estabilidade do modelo linear e definiu dois tipos de estabilidade:

- estabilidade local, relativa à resposta do *following-car* a uma flutuação no movimento do veículo que o precede. Para estudar a estabilidade local, reescalou o tempo em unidades do tempo de resposta, τ , usando a transformação $t = \alpha\tau$ de onde a equação (5.6) simplifica em:

$$\ddot{x}_n(t+1) = C(\dot{x}_{n+1}(\alpha) - \dot{x}_n(\alpha)), \quad n = 1, \dots, N \quad (5.7)$$

e $C = \alpha\tau$. O valor de C determina a estabilidade local de forma seguinte (Herman et al., 1959):

- Se $C \leq e^{-1}$, o movimento é exponencialmente amortecido. O que significa que após o aparecimento da flutuação o *following-car* ajusta a sua velocidade e mantendo-se a estabilidade.
- Se $e^{-1} < C \leq \pi/2$ o movimento é oscilatório com amortecimento exponencial. Embora exista a oscilação o amortecimento consegue manter o estado de equilíbrio.
- Se $C = \pi/2$, embora o movimento é oscilatório com amplitude constante.
- Se $C > \pi/2$, então o movimento é oscilatório com o aumento da amplitude.
- estabilidade assintótica, relativa ao modo no qual uma flutuação no movimento de um veículo, por exemplo o veículo principal do pelotão, é propagada. (Chandler et al., 1958) mostrou que é assintoticamente estável quando $C < \frac{1}{2}$. Se $C > \frac{1}{2}$ o tráfego é turbulento (instável).

Modelos posteriores, que veremos de seguida, assumem que a manobra e o controle de um condutor é um resultado não de apenas estímulos externos, tais como a dinâmica do veículo em questão e do seu veículo principal, mas também da sensibilidade do condutor e da distância relativa aos outros condutores.

5.2.1.1 Modelos não lineares

Após identificar algumas falhas, que referimos no modelo anterior, surgiram vários outros modelos. Gazis et al. (1959) propôs o primeiro modelo não linear, em colaboração com colaboradores do

m	l
0	0
0	1
1.5/0.2/0.6	0.9/0.9/0.3
0.7/0.2	2.5/1.6
0.9/−0.2	1/0.2

Tabela 5.1: Estimativas de m e L (Bracstone e McDonald, 1999)

laboratório da *General Motors*. A primeira proposta foi considerar o *headway* dos veículos de forma explícita no modelo da seguinte forma:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)}{x_{n+1}(t) - x_n(t)} \quad (5.8)$$

Apesar de resolver a questão da distância, o modelo não consegue prever a distinção entre os seguintes cenários:

I o veículo i segue o veículo $i + 1$ nas seguintes condições:

- $\dot{x}_i = 30$ km/h, $\dot{x}_{i+1}(t) = 10$ km/h e $b_i = 50$ m.

II um outro veículo ℓ segue outro veículo $\ell + 1$ nas seguintes condições:

- $\dot{x}_\ell = 90$ km/h, $\dot{x}_{\ell+1}(t) = 70$ km/h e $b_\ell = 50$ m.

Na prática, o condutor do *following-car* no segundo caso deve reagir de forma diferente do primeiro já que circula a uma velocidade maior e apesar da velocidade relativa ser igual ao caso anterior a pressão para se manter a uma distância segura de forma a poder desacelerar/travar para evitar colisão é maior. Então, é de esperar-se que, no cenário **II**, a resposta seja superior, o que não acontece. Resumindo, o modelo não consegue diferenciar os cenários de altas e baixas velocidades, mas cujo *headway* é o mesmo.

Edie (1961) modificou o modelo considerando que a velocidade do próprio veículo também influencia o comportamento do condutor. Ele propôs o seguinte modelo:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a v_n(t) \frac{\Delta v_n(t)}{\Delta x_n^2(t)}. \quad (5.9)$$

De acordo com este modelo, dois veículos podem ficar arbitrariamente perto, viajando a mesma velocidade, o que certamente não é verdade. Na prática nenhum condutor, salvo raras exceções, segue o outro a uma velocidade de 100 km/h a uma distância de um metro. A razão pela qual isto acontece é porque o modelo não prevê uma resposta quanto os veículos circulam à mesma velocidade. Na sequência do modelo anterior, generalizou-se o modelo GM de seguinte forma:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{[\dot{x}_i(t + \tau)]^m}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^l} [\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)] \quad (5.10)$$

Na tabela 5.1 encontram-se alguns dos valores de m e l mais usados.

5.2.1.2 Limitações do modelo GM

O modelo possui várias lacunas que foram resolvidos ao longo de várias investigações e modificações. Contudo, apesar das melhorias, o modelo ainda contém algumas falhas que inviabilizam a tradução real do que acontece com o tráfego. Entre elas, apontamos:

1. o *following-car* reage a qualquer variação, por mais pequena que seja, da velocidade relativa do *leading car* (Olstam e Tapani, 2004).
2. o *following-car* é afetado pelo seu *leading-car* mesmo que a distância entre eles seja significativa. Este efeito impossibilita o *following-car* de aumentar a sua velocidade afim de atingir a velocidade desejada.
3. Não foi demonstrado se existe uma conexão óbvia entre o comportamento do condutor e os parâmetros a , m e l propostos (Gipps, 1981).

5.2.2 Modelo velocidade óptima (OV)

A ideia associada ao modelo de velocidade óptima tem como base o facto de cada condutor acelerar (ou desacelerar) proporcionalmente à diferença entre uma velocidade óptima e a sua velocidade actual, onde a velocidade óptima depende da distância para o veículo da frente (*headway*). Bando et al. (1995) propuseram a seguinte equação dinâmica:

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n) - \dot{x}_n], \quad (5.11)$$

sendo

$$\Delta x_n = x_{n+1}(t) - x_n(t), \quad (5.12)$$

para cada veículo $n = 1, 2, \dots, N$, onde N é o número total de veículos na via e onde se conhece, *à priori*, a posição do N -ésimo veículo (*leading-car*). O condutor *calcula* a distância $x_{n+1}(t) - x_n(t)$ e determina a velocidade óptima $V(x_{n+1}(t) - x_n(t))$ a que se deve prosseguir. A estratégia do condutor, é manter uma velocidade segura de acordo com a posição relativa ao veículo que o precede. Quando $V(x_{n+1}(t) - x_n(t))$ for superior (inferior) a $v_n(t) = \dot{x}_n(t)$ isto significa que acelerou (desacelerou).

A constante de sensibilidade, a , quantifica a rapidez com que o n -ésimo veículo atinge a velocidade óptima, além disso quantifica a estabilidade da solução estacionária. Supomos, aqui, que ela é igual para todos os condutores e que $V(\cdot)$ é a velocidade óptima. A função $V(\cdot)$ é uma função monótona crescente e tal que $\lim_{\Delta x \rightarrow +\infty} V(\Delta x) = V_{\max}$, onde V_{\max} denota a velocidade máxima do veículo ou a velocidade máxima permitida pelo código da estrada (ou uma fracção destas). A sua escolha discute-se mais a diante. Estudos feitos por Bando et al. (1998) sugere que é praticamente irrelevante a inclusão do atraso no modelo. Isto deixa de ser significativo para valores suficientemente pequenos do atraso, τ . Não é o objectivo do trabalho incluir o atraso para o estudo.

5.2.2.1 Estabilidade linear do modelo OV

A análise de estabilidade linear é feita na hipótese de assumirmos a seguinte condição fronteira periódica: Assumimos que os condutores têm as mesmas características, que o i -ésimo veículo segue o $(i + 1)$ -ésimo veículo e o N -ésimo segue o primeiro. Neste caso, a dinâmica estabelecida por (5.11) é substituída por (supor $N = 4$)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= a(V(x_2 - x_1) - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_2 &= a(V(x_3 - x_2) - \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_3 &= a(V(x_4 - x_3) - \dot{x}_3) \\ \ddot{x}_4 &= a(V(x_1 - x_4 + L) - \dot{x}_4) \end{cases}$$

No caso geral temos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \ddot{x}_i &= a(V(x_{i+1} - x_i) - \dot{x}_i), \quad i = 1, \dots, N-1 \\ \ddot{x}_N &= a(V(x_1 - x_N + L) - \dot{x}_N) \end{cases} \quad (5.13)$$

A Figura 5.2, ilustra N veículos numa pista circular (pista do tipo Nascar). Esta situação pode ser interpretada como um anel rodoviário, na cidade do porto por exemplo. A medida que o número de veículos aumenta, o significado da periodicidade torna-se cada vez menor.

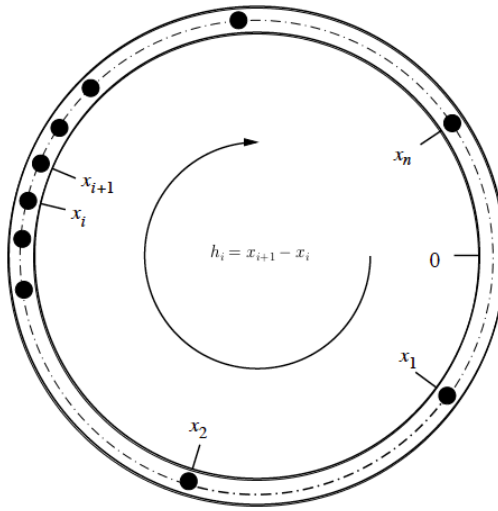


Figura 5.2: Posições $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$ de N veículos numa pista circular de comprimento L .

O sistema de equações diferenciais (5.13) admite uma solução estacionária que corresponde a termos N veículos, na pista circular de perímetro L , igualmente espaçados entre si de uma distância igual a $b = L/N$ e todos a viajar à mesma velocidade óptima $c = V(b)$. Essa solução estacionária da equação (5.11) é dada por

$$x_n^{(0)}(t) = b n + c t, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5.14)$$

Para estudar a estabilidade linear de (5.14), adicionamos-lhe uma *pequena* perturbação $y_n(t)$,

$$x_n(t) = x_n^{(0)} + y_n(t), \quad |y_n| \ll 1. \quad (5.15)$$

Daí, resulta

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = (x_{n+1}^{(0)} + y_{n+1}) - (x_n^{(0)} + y_n) = \Delta y_n + b, \quad (5.16)$$

com $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$. Assim, obtemos a equação para a perturbação

$$\ddot{y}_n(t) = a[V(\Delta y_n + b) - \dot{y}_n - c]. \quad (5.17)$$

Para a linearização de (5.17), fazemos a expansão de Taylor de $V(\Delta y_n + b)$ em torno de b , vindo

que

$$\ddot{y}_n(t) = a \left[V(b) + \dot{V}(b) \Delta y_n + \mathcal{O}((\Delta y_n)^2) - \dot{y}_n - c \right]. \quad (5.18)$$

Desprezando os termos não lineares, obtemos a equação linearizada para a perturbação $y_n(t)$:

$$\ddot{y}_n(t) = a [f \Delta y_n - \dot{y}_n], \quad (5.19)$$

onde f é a derivada de V no ponto b , isto é

$$f = V'(b). \quad (5.20)$$

O conjunto de todas as soluções de (5.19) é dada pela expansão de Fourier

$$y_k(n, t) = e^{i\alpha_k n + zt}, \quad (5.21)$$

onde $\alpha_k = \frac{2\pi}{N}k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) e $z = u + iv$ (u e v são reais). Derivando (5.21) em ordem a t , obtemos as derivadas de primeira e segunda ordem

$$\dot{y}_k(n, t) = z e^{i\alpha_k n + zt}, \quad (5.22)$$

e

$$\ddot{y}_k(n, t) = z^2 e^{i\alpha_k n + zt}. \quad (5.23)$$

Temos que,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = e^{(i\alpha_k n + zt) + i\alpha_k} - e^{(i\alpha_k n + zt)}. \quad (5.24)$$

Substituindo (5.22), (5.23) e (5.24) na equação diferencial (5.19), obtemos a equação algébrica

$$z^2 + az - af(e^{i\alpha_k} - 1) = 0. \quad (5.25)$$

As partes reais e imaginárias de z , a saber u e v , respectivamente, são determinados a partir da equação (5.25), obtendo-se

$$\begin{cases} u^2 - v^2 + au - af \cos \alpha_k + af &= 0 \\ 2uv + av - af \sin \alpha_k &= 0 \end{cases}. \quad (5.26)$$

A solução estacionária (5.14) é instável, se a amplitude de $y_k(n, t)$ aumentar (indefinidamente) com o tempo, o que ocorre quando $u > 0$. Se $u < 0$ a solução estacionária (5.14) é estável. A separatriz $u = 0$ determina a fronteira entre estas regiões de estabilidade e instabilidade, a qual é definida por (fazer $u = 0$ em (5.26)):

$$\begin{cases} -v^2 - af(\cos \alpha - 1) &= 0 \\ av &= af \sin \alpha \end{cases} \quad (5.27)$$

de onde se determina a região crítica no plano (f, α) :

$$\begin{aligned}
 f &= a \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \\
 &= a \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \\
 &= a \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \\
 &= \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.
 \end{aligned}$$

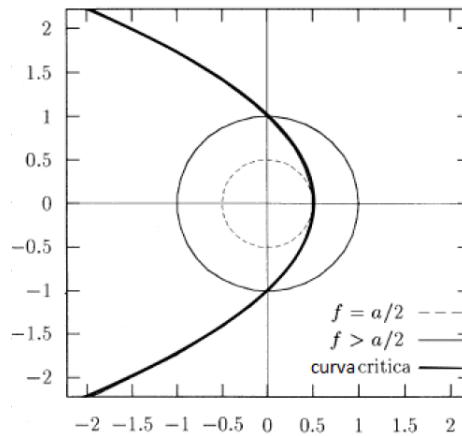


Figura 5.3: A região de estabilidade em coordenadas polares (f, α) .

5.2.2.2 Discussão do estado de equilíbrio

Estabilidade significa que um condutor pode deslocar-se com uma velocidade e uma distância segura. Ou seja, quando maior é a região de estabilidade, menor é a chance de se colidir com o outro veículo.

Consideremos a solução de equilíbrio estável $x_n^{(0)}$. Seja $y_k(n, t)$ uma (pequena) perturbação do equilíbrio de estado. O estado é instável se a amplitude de $y_k(n, t)$ aumentar indefinidamente com o tempo.

O plano (f, α) está separada pela região de estabilidade ($u < 0$) e outra de instabilidade pela curva ($u(\alpha, f) = 0$),

$$f = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (5.28)$$

representada na Figura (5.3). A região crítica separa região de estabilidade ($u < 0$) e a região de instabilidade ($u > 0$).

Para garantir a estabilidade, é necessária que qualquer u correspondente ao conjunto de α_k seja negativo. Por outro lado, uma única solução tal que $u > 0$ é suficiente para fazer com que a solução do equilíbrio de estado $x_n^{(0)}$ seja instável. Através da Figura 5.3 pode ver-se que, se o círculo (para

os $\{\alpha_k\}$ de um dado f) se intersectar com a curva crítica, tem-se pelo menos um $u > 0$. Assim, o critério de estabilidade resume-se, para qualquer função velocidade ótima V , de forma seguinte:

1. $f < \frac{a}{2}$ o estado é estável porque $u < 0$ para qualquer α_k ;
2. $f > \frac{a}{2}$ o estado é instável porque existe pelo menos um α_k tal que $u > 0$;
3. $f = \frac{a}{2}$ o estado mantém-se na região crítica.

5.2.2.3 Escolha da função velocidade ótima

A escolha da função velocidade ótima, V , não é arbitrária. Geralmente são funções sigmóidais que satisfazem determinadas condições, a saber (ver Figura 5.4):

1. $V(h)$ é continua, não negativa e definida para qualquer $h \geq 0$;
2. deve ser uma função monótona não decrescente. Assim, $V'(h) \geq 0$, para qualquer $h > 0$ (os condutores tendem a conduzir mais depressa quando o *headway* se aumentar);
3. possuir um limite inferior; i.e., $\exists h_0 \geq 0$ tal que $V(h) = 0$ para $h \in [0, h_0]$. h_0 é denominado de *jam headway*. Funciona como um limiar, sempre que o *headway* for inferior ou igual a h_0 o condutor tende a imobilizar veículo.
4. $V(h)$ é limitado superiormente; i.e., $\lim_{h \rightarrow \infty} V(h) = v_{max}$. Na prática v_{max} corresponde a velocidade desejada ou máxima permitida por lei.

Uma função que satisfaz estas propriedades foi proposta por Orosz et al. (2004)

$$V(h) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq h \leq 1 \\ v_{max} \frac{(h-1)^3}{1+(h-1)^3}, & \text{se } h > 1 \end{cases} \quad (5.29)$$

que considera $h_0 = 1$. De realçar que, nas condições anteriormente descritas, verifica-se as seguintes propriedades:

- V é continua, não negativa e monótona crescente.
- Existe uma distância de segurança $h_0 = 1$ para os veículos pararem. Se os veículos estiverem muito próximo, a uma distância menor ou igual a h_0 a tendência é de os condutores pararem para evitarem colisões.
- A velocidade cresce com o aumento do espaço entre condutores, já que $h_1 \geq h_2$ implica $V(h_1) \geq V(h_2)$. Quando $h \rightarrow 0$ temos que $V(h) \rightarrow 0$, o que significa, na prática, que há uma redução de velocidade no sentido de evitar colisão.
- temos que $V(h) \rightarrow v_{max}$ quando $h \rightarrow \infty$. Se o espaçamento entre o veículo for suficientemente grande, a velocidade desejada deve aproximar de v_{max} . Na prática significa que o condutor tem espaço suficiente para transitar-se a uma velocidade máxima desejada já que não há interação com nenhum veículo.

Por outro lado, para $V(\cdot)$ nestas condições, existe um ponto de inflexão, h_c , para a função $V(h)$, i.e. $V''(h_c) = 0$. Este ponto de inflexão designa-se também por distância de inflexão ou distância de segurança. Em termos físicos, representa a distância entre os veículos a partir da qual se espera a ocorrência de fluxos instáveis. Além disso, a existência deste ponto é importante. Caso contrário, não se pode obter a onda de densidade representando o tráfego congestionado. Obviamente, se o

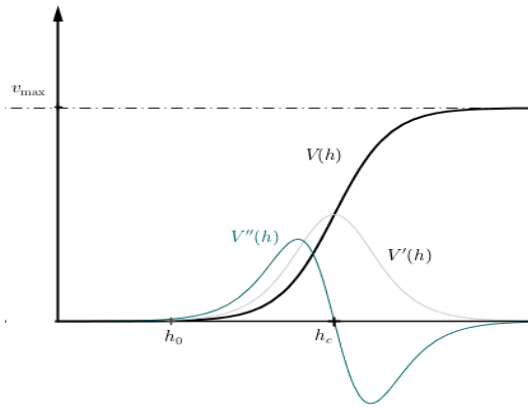


Figura 5.4: Função velocidade óptima

headway for menor do que a distância de segurança é de se esperar que o condutor trave de forma a não embater no veículo da frente.

Nas condições descritas, $V(\cdot)$ é capaz de descrever a formação das ondas pára-arranca e o surgimento do congestionamento do tráfego Gasser et al. (2004).

De entre outras possíveis escolhas para $V(\cdot)$ destacamos a função proposta por Bando et al. (1995)

$$V_1(h) = \tanh(h - 2) + \tanh(2), \quad (5.30)$$

que satisfaz as propriedades de (1) – (4), onde $h_0 = 0$. Mais tarde, Bando et al. (1998) propuseram uma nova função que considera os dados obtidos do tráfego nas auto-estradas do Japão:

$$V_2(h) = 16.8 [\tanh(0.086(h - 25)) + 0.913]. \quad (5.31)$$

Neste caso, considera-se $h_0 \approx 7.0319\text{m}$, $h_c = 25\text{m}$ e $v_{\max} = 32.1384\text{m/s}$. Como facilmente pode verificar-se, não satisfaz a propriedade (3), pois $V(h) < 0$ se $h < h_0$. Esta deficiência foi criticada Gasser et al. (2004) por não se aplicar em ambientes cujo *headway* é uma valor pequeno. Uma alternativa é tomar:

$$V_3(h) = \max\{0, V_2\}. \quad (5.32)$$

Nas simulações que apresentaremos sobre o modelo velocidade óptima, assumiremos para a velocidade óptima a forma sugerida por Li e Sun (2012), a saber:

$$V(h) = \frac{1}{2} v_{\max} [\tanh(h - h_c) + \tanh(h_c)], \quad (5.33)$$

onde v_{\max} é a velocidade máxima a que um veículo pode viajar e h_c é a distância de segurança (ver exemplo, Figura 5.4). Notar que $V(0) = \frac{1}{2} v_{\max} [\tanh(-h_c) + \tanh(h_c)] = 0$, e $\lim_{h \rightarrow +\infty} V(h) = \frac{1}{2} v_{\max} (1 + \tanh(h_c)) \approx v_{\max}$, desde que $h_c \geq 2\text{m}$, conforme evidencia a Tabela 5.2. Observar ainda que $V(h_c) = \frac{1}{2} v_{\max} \tanh(h_c) \approx \frac{1}{2} v_{\max}$, desde que $h_c \geq 2\text{m}$.

h_c	$\tanh h_c$
1.5	0.905
2	0.964
2.5	0.987
3	0.995
$+\infty$	1

Tabela 5.2: $\tanh h_c$

5.2.2.4 Algumas extensões do modelo velocidade óptima

Apesar do sucesso e da simplicidade do modelo OV, também foram apontadas algumas limitações no modelo. Estas limitações motivaram o desenvolvimento de vários outros modelos que mantêm a ideia base do modelo original acrescentando novos estímulos. Nesta secção apresentamos alguns destes modelos.

Uma das limitações apontadas para o modelo original tem a ver com o facto de, comparativamente com dados empíricos obtidos por Helbing e Tilch (1998b), ocorrerem altas acelerações e desacelerações poucos realísticos. Os valores empíricos obtidos prevêm uma aceleração entre -3 m/s^2 a 4 m/s^2 .

Sawada (citado por Li e Sun, 2012) analisou o modelo geral de velocidade óptima e argumentou que o condutor também presta atenção no *headway* do veículo que o precede. Ele propôs o modelo designado por *Generalized Optimal Velocity* (GOV):

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t), \Delta x_{n+1}(t)) - v_n(t)], \quad (5.34)$$

onde $V(\Delta x_n(t), \Delta x_{n+1}(t)) = (1 - p)\Delta x_n(t) + p\Delta x_{n+1}(t)$, e $p \in [0, \frac{1}{2}]$ que garante que a parte dominante da função velocidade óptima seja o termo dependente $\Delta x_n(t)$.

Devido a interacção com outros veículos os condutores podem ser influenciados por outros veículos na estrada e determinar uma velocidade própria. Com base nisto, Ge et al. (2004) propôs o modelo que se segue:

$$\ddot{x}_n(t) = a \left[V \sum_{j=1}^q \beta_j \Delta x_{n+j}(t) \right], \quad (5.35)$$

onde $\beta_j \in \mathbb{R}^+$ é o peso da função $\Delta x_{n+j}(t)$ e assume-se que decresce com o crescimento de j . $q \in \mathbb{N}$ é o numero de veículos precedentes. O modelo considera multiplas interacções entre veículos precedentes.

Helbing e Tilch (1998b) realizaram a calibração do modelo OV baseado em dados empíricos do modelo *follow-the-leader*. Eles usaram a velocidade óptima que se segue:

$$V(\Delta x_n(t)) = v_1 + v_2 \tanh(c_1(\Delta x_n(t) - l_c) - c_2), \quad (5.36)$$

onde $l_c = 5 \text{ m}$, $v_1 = 6.75 \text{ m/s}$, $v_2 = 7.91 \text{ m/s}$, $c_1 = 0.13$ e $c_2 = 1.57$. Identificaram a ocorrência desacelerações irrealista e a ocorrência de altas acelerações comparativamente com os dados empíricos. Esta constatação motivou-os a uma nova extensão do modelo. Eles entenderam que quando o $\Delta x_n < 0$, é necessário considerar a aceleração causada pela velocidade relativa de

dois veículos consecutivos. O modelo, por eles proposto, é conhecido por *Generalized Force* (GF) com a formulação seguinte:

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t) - v_n(t)) + \lambda \Delta v_n(t) H(-\Delta v_n(t))], \quad (5.37)$$

onde λ é o coeficiente de sensibilidade e $H(\cdot)$ (Heaveside) é a função degrau seguinte:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Os resultados do modelo GF revelaram-se bastante bons comparativamente aos resultados empíricos (Li e Sun, 2012). Todavia, nem GF nem GOV explicam o fenómeno de tráfego descrito em Treiber et al. (1999). Acontece que, se os veículos que precedem o i -ésimo veículo forem muito mais rápidos do que aqueles que o seguem, então o veículo não consegue travar, mesmo se o *headway* for mais pequeno do que a distância de segurança.

Jiang et al. (2002) sugeriu que a velocidade relativa também interfere na manobra do condutor. Assim sendo, segundo ele, deve-se considerar este factor de forma explícita. Com ele surge o modelo *Full Velocity Difference* (FVD):

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t) - v_n(t))] + \lambda \Delta v_n(t). \quad (5.38)$$

Este modelo considera tanto os efeitos da distância entre veículos como a diferença de velocidade. Teoricamente é considerado mais realístico de que os anteriores. Investigações numéricas mostraram que este modelo descreve as fases de transição do tráfego e a formação do congestionamento (Li e Sun, 2012).

A maior limitação do modelo FVD, apontado por (Li e Sun, 2012), é o facto de modelar a diferença de velocidades de forma simétrica, o que não é realista. Pois, acredita-se que a capacidade de aceleração de um veículo é superior ao de desaceleração. Levando esta assimetria em conta, Gong et al. (2008) propôs um modelo similar ao GF considerando o efeito da assimetria e desaceleração no modelo *car-following*.

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t) - v_n(t)) + \lambda_1 \Delta v_n(t) H(-\Delta v_n(t)) + \lambda_2 \Delta v_n H(\Delta v_n(t))], \quad (5.39)$$

onde λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}_0^+$ são diferentes coeficientes de sensibilidade.

Após simulações numéricas detectou-se que o modelo FVD gera desacelerações muito elevadas. Ge et al. (2008) modificou o modelo levando em conta a diferença de velocidade $\Delta v_{n+1}(t)$, com a formulação seguinte.

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda G(\Delta v_n(t), \Delta v_{n+1}(t)), \quad (5.40)$$

onde $G(\Delta x_n(t), \Delta v_{n+1}(t)) = p \Delta v_n(t) + (1 - p) \Delta x_{n+1}(t)$ é o valor do peso. Os resultados de simulações numéricas indicaram que as altas desacelerações não aparecem (Li e Sun, 2012).

Zao e Gao (2005) argumentaram que tanto no modelo GF como FVD a diferença de velocidade tem fortes efeitos sobre o comportamento de trânsito, devido à seu grande valor, de modo que o veículo em movimento pode responder rapidamente ao veículo que está à frente. Assim, a diferença de aceleração desempenha um papel importante na dinâmica do trânsito. Tomando a diferença de aceleração em conta, eles desenvolveram designado por *Full Velocite and Acceleration Difference*

(FVAD)

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t) - v_n(t))] + \lambda \Delta v_n(t) + k(\Delta a_n(t-1), a_{n+1}(t)) \Delta a_n(t-1) \quad (5.41)$$

onde $\Delta a_n(t) = a_{n+1}(t) - a_n(t)$ é a diferença de aceleração entre o $(n+1)$ -veículo o n -veículo. $k \in \mathbb{R}$ e $k \geq 0$ é uma constante

$$h(\Delta a_n(t-1), a_{n+1}(t)) = \begin{cases} -1, & \Delta a_n(t-1) > 0 \text{ e } a_{n+1}(t) \leq 0 \\ 1, & \text{outros casos} \end{cases} \quad (5.42)$$

Investigações numéricas posteriores indicaram que não acontece acidentes e não existem acelerações irrealistas no modelo FAVD (Li e Sun, 2012).

Tao et al. (2006) propuseram um novo modelo baseado no facto de que, na prática, o condutor pode prestar atenção dois ou mais veículos que o precedem. O modelo possui a formulação seguinte:

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \sum_{j=1}^q \lambda_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (5.43)$$

onde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ e $\lambda_j > \lambda_{j+1}$. $q \in \mathbb{N}$ é o número de veículos precedentes.

Estudos posteriores indicam que a distância ou a diferença de velocidades pode estabilizar o tráfego (Li e Sun, 2012). Os modelos lidam apenas com uma delas. Espera-se que o tráfego seja mais estável incluindo ambos os casos. Baseando neste pressuposto desenvolveu-se um modelo que incorpora tanto a distância como a diferença de velocidade dos múltiplos veículos precedentes. O modelo é conhecido por modelo *Multiple Headway and Velocity Difference* (MHVD) (Xie et al., 2008). O modelo possui a seguinte formulação matemática:

$$\ddot{x}_n(t) = a [V(\Delta x_n(t), \Delta x_{n+1}(t), \dots, \Delta x_{n+\nu-1}(t)) - v_n(t)] + \sum_{j=1}^q \lambda_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (5.44)$$

onde ν e $q \in \mathbb{N}$ são os números dos veículos precedentes considerados em diferentes oportunidades. A investigação numérica mostrou que o valor crítico da sensibilidade no modelo MHVD decresce e a região estável é aparentemente alargada, comparativamente com os modelos FVD e MVD (Li e Sun, 2012).

No sentido de se introduzir outro factor de diferença do veículo e distinguir o tamanho dos diferentes veículos precedentes Sun et al. (2010) desenvolveu o modelo *Multiple Ahead and Velocity Difference* (MAVD):

$$\ddot{x}_n(t) = a \left[V \left(\sum_{j=1}^q \beta_j \Delta x_{n+j-1}(t) \right) - v_n(t) \right] + \lambda \sum_{j=1}^q \zeta_j \Delta v_{n+j-1}(t) \quad (5.45)$$

onde $\beta_j \in \mathbb{R}$ e $\beta_j \geq 0$ é o peso da função $\Delta x_{n+j-1}(t)$, β_j decresce com o crescimento de j o que significa que o efeito do *headway* é cada vez menor quando menor for o número de veículos precedentes. $\zeta_j \in \mathbb{R}$ e $\zeta_j \geq 0$ é o peso da função $\Delta v_{n+j-1}(t)$. Além disso, β_j e ζ_j introduzido no modelo são factores diferentes no modelo e diferenciam o tamanho dos veículos precedentes.

Capítulo 6

Relação entre os modelos microscópicos e macroscópicos

Uma das vantagens do modelos GM, é de se permitir estabelecer uma relação com os resultados macroscópicos através dos parâmetros: fluxo velocidade e densidade. Gazis et al. (1959) mostrou que tal relação é possível recorrendo aos modelos de velocidade de tráfego em equilíbrio referidos no Capítulo 2. Recordemos que o modelo GM assume a seguinte forma Geral:

$$\ddot{x}(t + \tau) = a \frac{[\dot{x}_n(t + \tau)]^m}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^l} [\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)]. \quad (6.1)$$

6.1 Modelo GM proposto por Chandler et al. (1958)

Se considerarmos $m = 0$ e $l = 0$, obtemos o modelo:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)] \quad (6.2)$$

Em equilíbrio (no estado estacionário), todos os veículos possuem o mesmo *headway*, $b = x_{n+1} - x_n$, e circulam a mesma velocidade v . Além disso, a posição e a velocidade dos veículos não dependem do tempo. Deste modo $\dot{x}_n(t + \tau)$ é o mesmo que a velocidade v . Ora, temos que, por definição, a densidade $\rho = 1/[x_{n+1}(t) - x_n(t)]$ ou seja $b = 1/\rho$ e, portanto, a equação (6.2) reduz-se a:

$$\dot{x}_n(t + \tau) = v = ab + C \quad (6.3)$$

Para determinar a constante de integração C , sabemos que em equilíbrio $v = 0$ e a densidade é máxima $\rho = \rho_m$ e assim $C = -a/\rho_m$. Finalmente podemos expressar v em função de b de seguinte forma,

$$v = a(1/\rho - 1/\rho_m). \quad (6.4)$$

Ora, atendendo que $f = \rho v$ temos a seguinte equação para o estado de equilíbrio

$$f = \rho a [1/\rho - 1/\rho_m] = a [1 - \rho/\rho_m]. \quad (6.5)$$

Por outro lado, de (6.5) podemos ver que quando $\rho = 0$ o fluxo deve atingir o valor máximo f_m tal que $f_m = a$. Neste caso $[a] = [f] = t^{-1}$. Esta relação deduzida até aqui, no entanto, é contraditória. Nestas condições (6.5) prevê um fluxo máximo para $\rho = 0$ de 3600 veículos/hora se considerarmos $a = (1s)^{-1}$. É de realçar que, o resultado obtido, confere informações sobre o quão irrealista é o modelo (6.2).

6.2 Derivação do modelo de Greenshields

Escolhendo $l = 2$ e $m = 0$ vamos obter:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^2} \quad (6.6)$$

integrando em t obtemos que

$$\dot{x}_n(t + \tau) = -a \frac{1}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]} + C \quad (6.7)$$

onde C é a constante de integração. Nas condições de equilíbrio, a equação acima resulta:

$$v = -a\rho + C \quad (6.8)$$

Na fronteira temos que $\rho = 0 \Rightarrow v = v_f$, e tiramos que $C = v_f$. Por outro lado, $\rho = \rho_m \Rightarrow v = 0$, e assim $0 = -a\rho_m + v_f$, de onde tiramos que

$$v = v_f - \frac{v_f}{\rho_m} \rho \quad (6.9)$$

6.3 Derivação do modelo de Greenberg

Por analogia ao a análise anterior, se considerarmos $m = 0$ e $l = 1$, obtemos o modelo:

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]} \quad (6.10)$$

integrando (6.10) em ordem a t obtemos

$$\dot{x}_n(t + \tau) = a \ln [x_{n+1}(t) - x_n(t)] + C_n = a \ln [b_n(t)] + C_n \quad (6.11)$$

onde C_n é a constante de integração. Considerando as mesmas condições do que na secção anterior a (6.11) reduz-se a:

$$\dot{x}_n(t + \tau) = v = a \ln \frac{1}{\rho} + C. \quad (6.12)$$

Considerando que $v = 0$ para $\rho = \rho_m$ obtemos que $C = a \ln \rho_m$. Assim obtemos que

$$v = a \ln \frac{\rho_m}{\rho} \quad (6.13)$$

Vimos que a velocidade de tráfego depende da densidade e que $f = \rho v$. Assim, $f = a \rho \ln \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right)$. Para determinar o valor de a sabemos que $f' = 0$ quando o fluxo é máximo assim temos que

$$\begin{aligned} f' &= a [\rho(\rho/\rho_m)(-\rho_m/\rho^2) + \ln(\rho_m/\rho)] \\ &= a [-1 + \ln(\rho_m/\rho)] \\ &= a \ln(\rho_m/(\rho e)) \end{aligned}$$

onde e é o número de Neper. Assumindo que $a \neq 0$ e definindo $\hat{\rho}$ a densidade para o qual o fluxo é máximo obtemos de $f' = 0$ que $\hat{\rho} = \rho_m/e$. Definindo v_f como a velocidade em $\hat{\rho}$, segue que o fluxo máximo é $f_m = v_f \hat{\rho} = v_f \rho_m/e$. Substituindo v_f e $\hat{\rho}$ em (6.13) obtemos que

$v_f = a \ln \frac{\rho_m}{\rho} = a \ln \frac{\rho_m e}{\rho_m} = a$. A equação (6.13) é o modelo de Greenberg considerado no Capítulo 2.

6.4 Derivação do modelo de Underwood

Escolhendo $l = 2$ e $m = 1$ vamos obter:

$$\ddot{x}(t + \tau) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t) [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)]}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^2} \quad (6.14)$$

$$\frac{\ddot{x}_n(t + \tau)}{\dot{x}_n(t + \tau)} = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^2} \quad (6.15)$$

Integrando em t vamos obter:

$$\ln(\dot{x}_n(t + \tau)) = -a \frac{1}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]} \quad (6.16)$$

Nas condições de equilíbrio, temos a seguinte relação:

$$\ln(v) = -a\rho + C$$

Quando $\rho = 0$, $v = v_f$ obtemos que

$$v = \exp(-a\rho + C) = C_1 \exp(-a\rho) \quad (6.17)$$

Assim, $v = v_f = C_1 \exp(-a \times 0) = C_1$. Portanto, $v = v_f \exp(-a\rho)$. Para determinar o a , determinamos o valor para o qual o fluxo é máximo.

$$\begin{aligned} f' &= v_f \exp(-a\rho) - av_f \rho \exp(-a\rho) \\ &= v_f \exp(-a\rho) [1 - a\rho]. \end{aligned}$$

Fazendo $f' = 0$ obtemos que $v_m = \frac{v_f}{e}$ onde v_m é a velocidade onde o fluxo é máximo. Seja $\hat{\rho} = \rho(v_m)$ (a densidade onde o fluxo é máximo) temos que

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{v_f}{e} \\ &= \frac{v_f}{e^{a\hat{\rho}}} \end{aligned}$$

o que implica que $a\hat{\rho} = 1$. Logo $v = v_f \exp\left(\frac{-\rho}{\hat{\rho}}\right)$ é o modelo de Underwood.

Capítulo 7

Simulações numéricas e discussão de resultados

Para a integração numérica do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

que representa as equações dinâmicas dos modelos microscópicos apresentados, onde usamos o esquema de Runge-Kutta de 4.^a ordem:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(y_n) \\ k_2 &= \Delta t f\left(y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= \Delta t f\left(y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= \Delta t f(y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4]/6 + \mathcal{O}(\Delta t^5) \end{aligned}$$

com $\Delta t = 10^{-4}$. As implementações computacionais foram feitas, inicialmente, em (i) Fortran 95 em conjunto com o pacote gráfico PGPLOT e, posteriormente, em (ii) MATLAB. De um ponto de vista prático, o MATLAB é mais *amigável* do que Fortran 95, no sentido de que permite maior interactividade gráfica. Já o Fortran 95 é extremamente rápido quando comparado com o MATLAB, mas requer o pacote extra PGPLOT para a visualização gráfica, o que torna a exploração computacional muito pouco prática. Apesar da rapidez do Fortran 95 face ao MATLAB, o tipo de problema que tratamos está, na sua generalidade, ao alcance das potencialidades computacionais do MATLAB de forma a que a perda de velocidade, perante o Fortran 95, não seja significativa.

7.1 Simulação numérica do modelo GM (l=0 e m=1)

Escolhemos $l = 0$ e $m = 1$ para o modelo GM e desprezamos o atraso e consideramos $a = 1$. Assim, consideramos o modelo

$$\ddot{x}_n(t) = a \frac{\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)}{x_{n+1}(t) - x_n(t)}. \quad (7.1)$$

Integrando (7.1) em ordem a t , obtemos $\dot{x}_n(t) = \ln(x_{n+1}(t) - x_n(t)) + \dot{x}_n(0) - \alpha(\ln(x_{n+1}(0) - x_n(0))) = \ln(x_{n+1}(t) - x_n(t)) + d_n$, que é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{dx_n}{dt} &= a \ln(x_{n+1}(t) - x_n(t)) + d_n \\ X_n(0) &= X_0 \end{cases} \quad (7.2)$$

onde $d_n = \dot{X}_n(0) - a \ln(x_{n+1}(0) - x_n(0))$ ($n = 1 \dots N - 1$) e $X_N(t)$ é dado.

7.1.1 Condições iniciais e distribuições de veículos

Consideramos que os veículos encontram-se distribuídos de forma uniforme circulando entre 24 m/s a 26 m/s (ver Algoritmo 7.1). Alocamos os 99 primeiros veículos considerando que distam entre si de 20 m e têm o mesmo comprimento de 4 m (ver esquema na Figura 7.1). O movimento do centésimo veículo é dado por $x_{100}(t) = 3000 + vt$. A implementação numérica foi feita em Fortran 95 e o código encontra-se no Apêndice.

Algoritmo 7.1 Código (em Fortran 95) para a distribuição inicial ($t = 0$) dos veículos.

Delta = distancia_entre_carros + comprimento_carro

```
DO i = 1, nm1
  a = (i-1)*Delta
  b = i*Delta
  x(i) = Dist_Uniforme(seed, a, b, opcao)
  xl(i) = 25.d0 + Dist_Uniforme(seed, -1.D0, 1.D0, opcao)
END DO
```

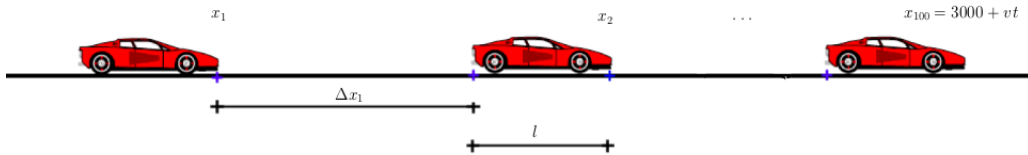


Figura 7.1: Esquema com a distribuição de alguns veículos, onde se identificam alguns dos parâmetros associados.

7.1.2 Resultados e discussão

Por conveniência, vamos designar aqui o veículo que vai mais à frente e que não tem um *leading-car*, de **veículo-chefe** e o seu *following-car* de **following-principal**. Assim, o centésimo veículo é o **veículo-chefe**.

Na Figura 7.2, ilustramos o resultado de uma simulação que ilustra o fluxo tráfego durante a primeira hora. O **veículo-chefe** circula à uma velocidade de 30 m/s. Podemos constatar que, inicialmente, os restantes veículos se dispersam gradualmente de tal modo que o *headway* se torna maior (ver Figura 7.3a). Primeiro, o **following-principal** ajusta a sua velocidade no sentido de atingir velocidade desejada que é igual ao do seu *leading-car*, conforme podemos ver na Figura 7.3b. No entanto, este ajuste não é instantâneo, pois leva algum tempo a acelerar. Esta tendência é replicada pelo seu *following-car* e, assim, sucessivamente, para os restantes carros.

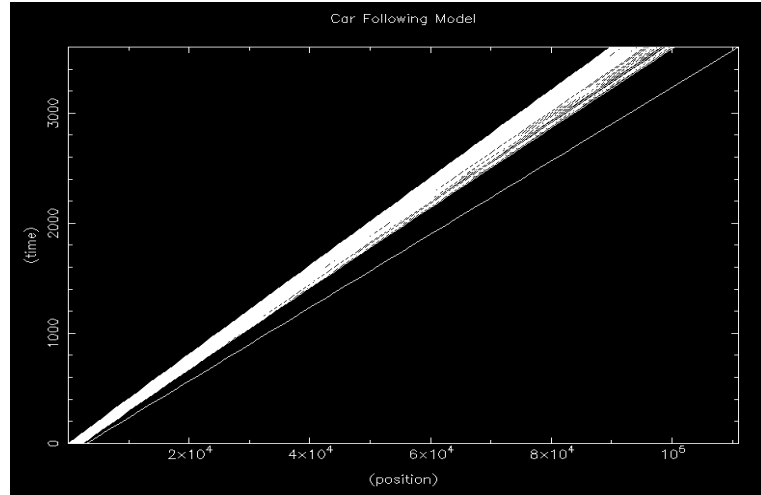


Figura 7.2: Posições dos veículos durante a primeira hora. O veículo-chefe circula a uma velocidade 30 m/s.

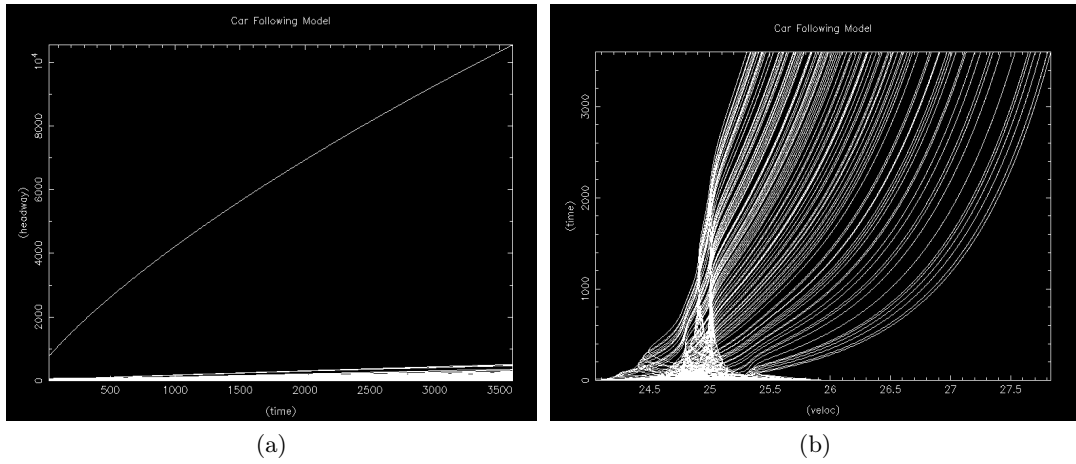


Figura 7.3: (a) $(\Delta x_n, t)$ – headway dos 99 primeiros veículos. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos

Na Figura 7.4, ilustramos o resultado da simulação do fluxo de tráfego durante os primeiros 10 minutos, onde, desta vez, o *veículo-chefe* circula à uma velocidade de 20 m/s. Podemos constatar que, os veículos não conseguem dispersar-se suficientemente uns dos outros de forma a cada um deles possa manter uma distância e velocidade de segurança (ver Figuras 7.5a e 7.5b). O *following-principal* não consegue ajustar a velocidade a tempo de não se colidir com o seu *leading-car*. Tal como no caso anterior, os restantes *following-cars* replicam o comportamento. Todavia, estamos perante um caso em que houve acidentes.

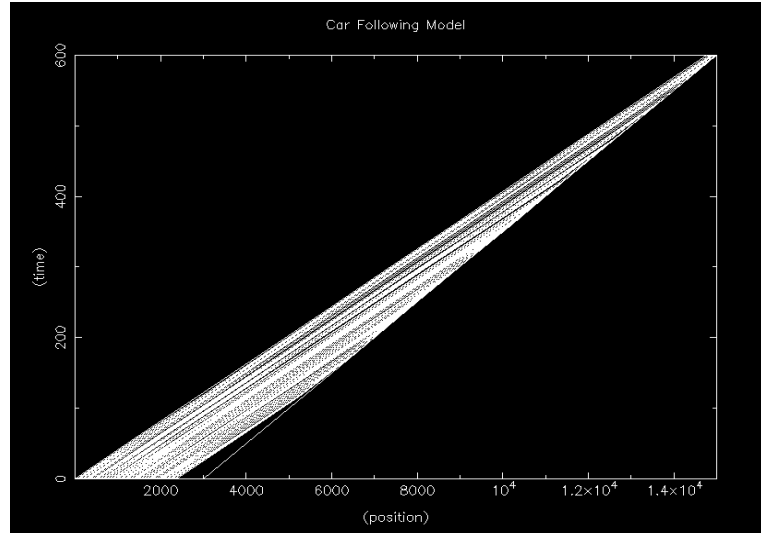


Figura 7.4: Posições dos veículos durante os primeiros 10 minutos. O veículo-chefe circula a uma velocidade 20 m/s.

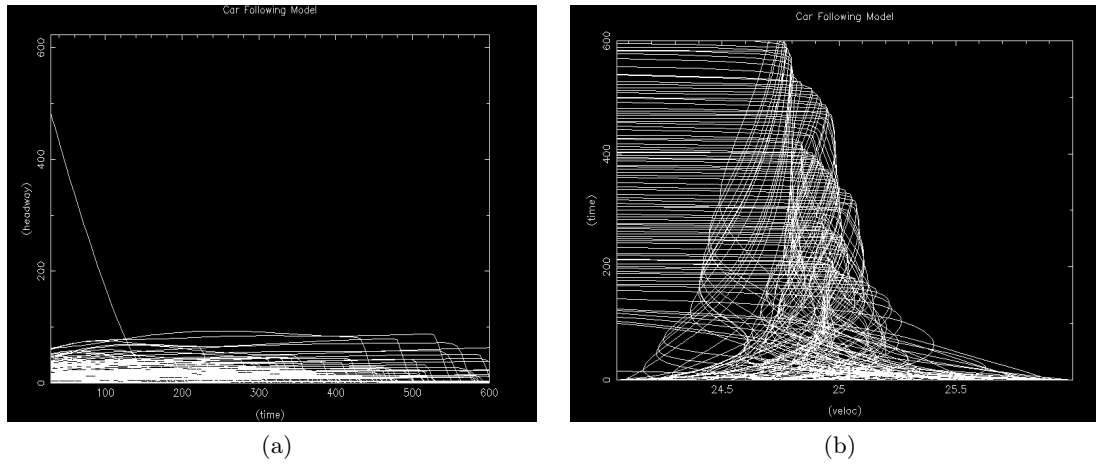


Figura 7.5: (a) $(\Delta x_n, t)$ —headway dos 99 primeiros veículos. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos

Na Figura 7.6, ilustramos simulação do fluxo de tráfego durante a primeira hora, onde o *veículo-chefe* circula à uma velocidade de 25 m/s. Aqui, há uma resposta adequada do *following-principal*. Podemos ver que, apesar de perder a distância para o seu *leading-car* (ver Figura 7.7a), a tendência é a uma dada altura manter-se a uma distância constante já que a sua velocidade tende a ser igual ao do seu *leading-car* (ver figura 7.7b). Uma vez mais, esta tendência é replicada pelos demais veículos.

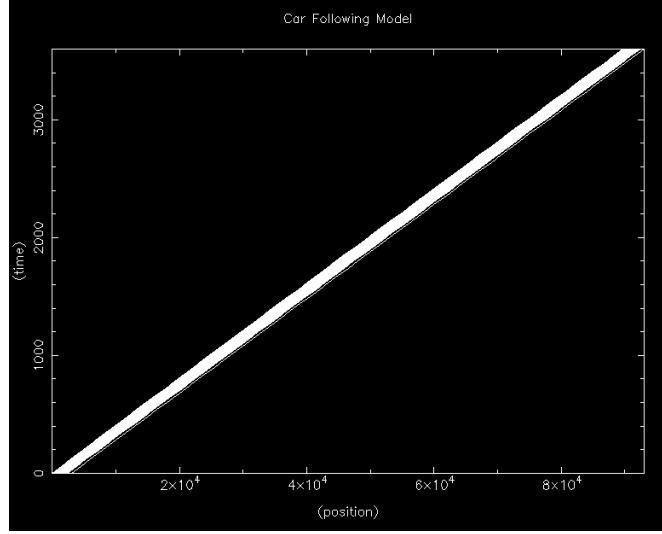


Figura 7.6: (x_n, t) –posições dos veículos durante a primeira hora. O veículo chefe circula a uma velocidade 25 m/s.

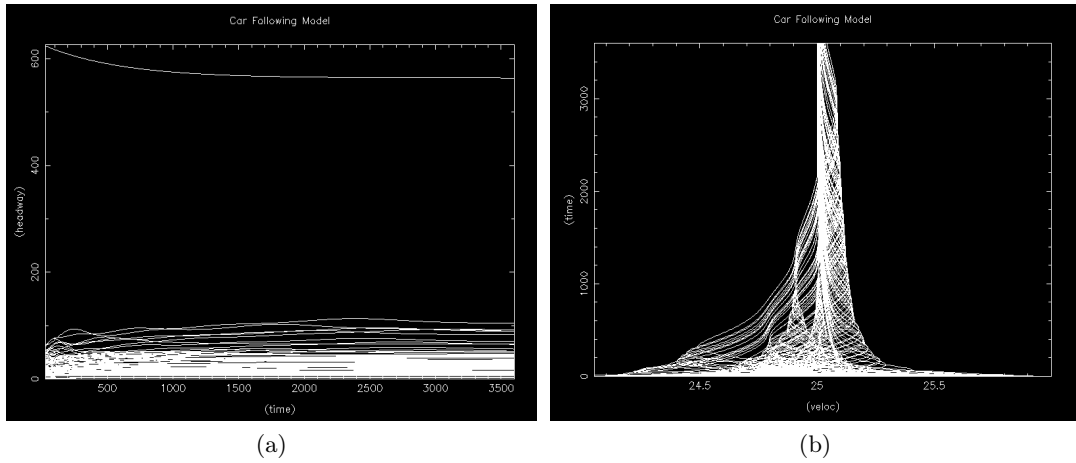


Figura 7.7: (a) *Headway* dos 99 primeiros veículos para a. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos

Na Figura 7.8, ilustramos o resultado da simulação obtida durante uma hora, onde *veículo-chefe* circula à velocidade de 15 m/s. Dado que, neste caso, a diferença de velocidade para o *veículo-chefe* é ainda maior, o choque ocorre num intervalo ainda mais curto, como podemos observar nas figuras 7.9b e 7.9a. Observar que o *headway* e as velocidades caem todos para zero.

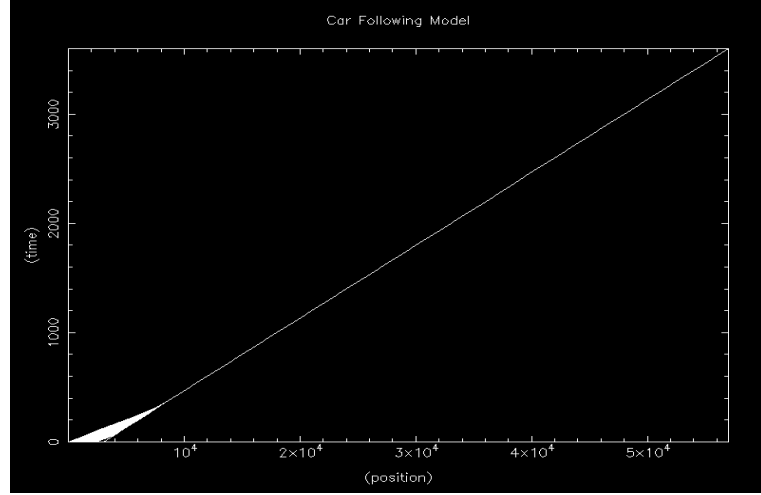


Figura 7.8: Posições dos veículos durante a primeira hora onde o veículo-chefe circula a 15 m/s.

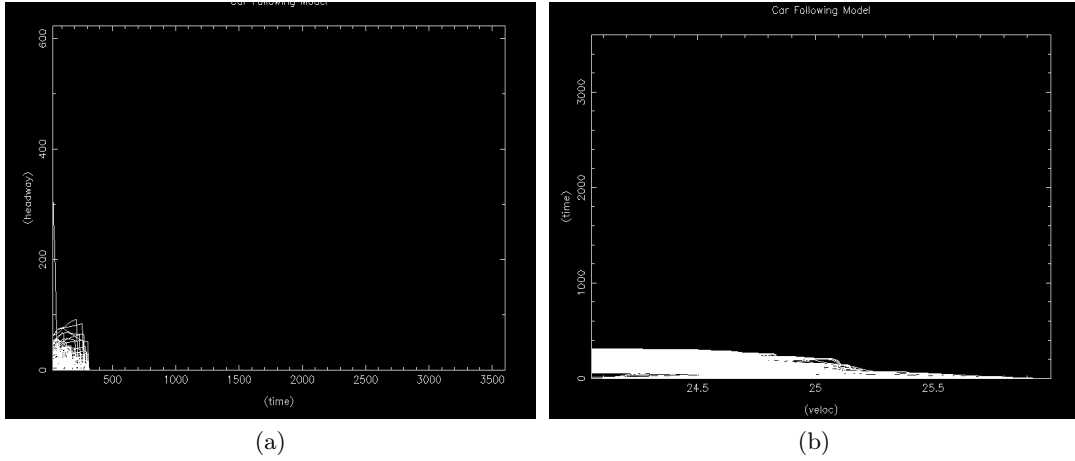


Figura 7.9: (a) $(\Delta x_n, t)$ – headway dos 99 primeiros veículos. (b) Velocidade dos 99 primeiros veículos

7.1.3 Apreciação global dos resultados

Sumariamente, constatamos que, de facto, cada veículo segue o seu *leading-car* com algum realismo prático, inclusive no que diz respeito à ocorrência de acidentes. Verificamos que, tal como na prática, o *following-car* precisa de uma distância segura para efectuar uma paragem ou desacelerar de forma a não embater no seu *leading-car*. É de realçar, no entanto, que, em momento algum, o *following-car* atinge uma velocidade superior ao seu *leading-car*, conforme a revisão que fizemos previamente. Vimos, no primeiro exemplo, que o *following-principal* tem um *headway* suficientemente grande para circular a uma velocidade maior, porém tal não se sucedeu. Por outro lado, o facto dos veículos tenderem a desacelerar em função da velocidade e não da distância dos seu *leading-car*, permite que ocorra acidentes se a diferença entre as velocidades for muito grande para o *leading-car* ou o *headway* não for suficientemente grande.

7.2 Simulação numérica do modelo velocidade óptima

Para a simulação numérica do modelo velocidade óptima, começamos por transformar o sistema de equações diferenciais de 2ª ordem (5.11) no sistema de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = a[V(x_{i+1} - x_i) - v_i] \end{cases} \quad (7.3)$$

sendo x_i e v_i a posição e velocidade do i -ésimo veículo ($i = 1, 2, \dots, N$).

Consideramos as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_1^{(0)} + \varsigma, \varsigma \sim U(0, 1) \\ x_n(0) &= x_n^{(0)}, \quad n \neq 1 \\ \dot{x}_n(0) &= 0. \end{aligned}$$

Assumimos que os veículos se movem nas mesmas condições referidas na Secção 5.2.2.1, com $x_n^{(0)} = bn$. O integrador numérico é o de Runge-Kutta de 4ª ordem com $\Delta t = 10^{-4}$. Apresentamos aqui os resultados da simulação feita, considerando o modelo proposto por Bando et al. (1995) e a velocidade óptima dada por (5.30), a que corresponde $h_0 = 0$, $h_c = 2$, e $v_{\max} = 2$. Usamos $a = 1$.

Desprezamos os comprimentos dos veículos. Para análise de resultados propomos dois casos distintos. Analisamos um caso estável e um caso instável. Fazemos análise de acordo com os regimes de condução observados na prática.

- Caso estável, $N = 100$ e $L = 400$,

$$\begin{aligned} b &= \frac{L}{N} = 4, \\ f = V'(b) &= 1 - \tanh^2(b - 2) = 0.0707 < \frac{a}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Caso instável, $N = 100$ e $L = 200$,

$$\begin{aligned} b &= \frac{L}{N} = 2, \\ f = V'(b) &= 1 - \tanh^2(b - 2) = 1 > \frac{a}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7.2.1 Discussão de Resultados

Na Figura 7.10, ilustramos o resultado da simulação do fluxo do tráfego durante os primeiros 300 segundos para o caso estável. Apesar da perturbação inicial do tráfego, os condutores controlam os veículos de forma estável. Não há engarrafamentos e não evidenciamos a ocorrência de ondas do tipo *pára-arranca* nem de acidentes. Concluímos, também, que há uma tendência dos *following-cars* em se manterem à uma distância segura para os respectivos *leading-car* (ver Figura 7.11).

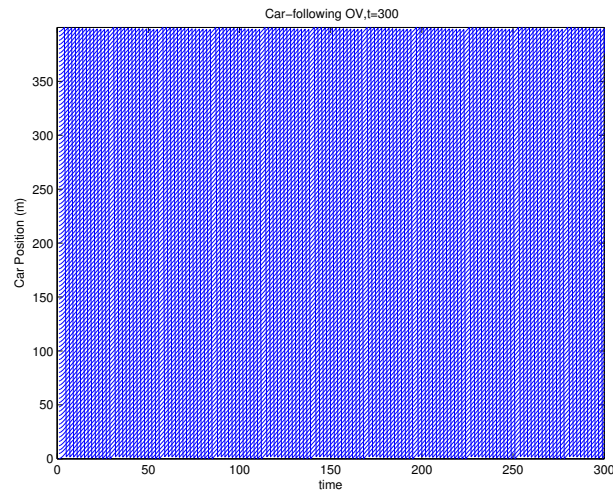


Figura 7.10: (t, x_n) posições dos 100 veículos na pista circular para o caso estável durante os primeiros 300 segundos

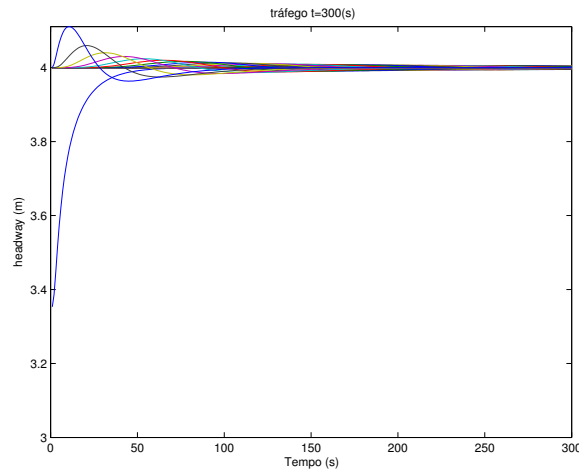


Figura 7.11: *Headway* dos veículos no caso estável

Na Figura 7.12, ilustramos a evolução das velocidades de cada veículo. Como podemos observar, os veículos aumentam as suas velocidades sem exceder a velocidade máxima. Além disso, não há oscilação de velocidade. Por outro lado, quanto menor (maior) for o *headway*, menor (maior) é a velocidade ótima. O menor valor para a velocidade ótima é $V(\Delta x_{\min}) = V(3.0850) = 1.7591$ m/s e o maior valor é $V(\Delta x_{\max}) = V(4.1297) = 1.9362$ m/s.

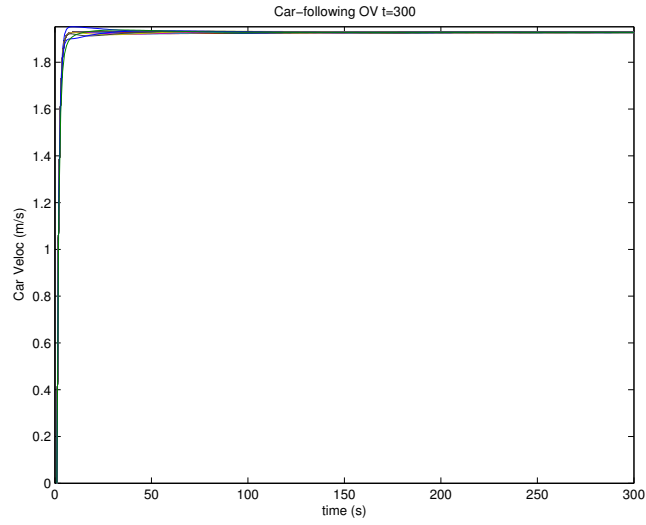


Figura 7.12: Evolução das velocidades dos veículos

Diferente do caso anterior, no caso em que $L = 200$, ilustrado na Figura 7.13, podemos ver que a perturbação inicial provoca uma instabilidade no fluxo do tráfego. Há congestionamento de tráfego, mas não há acidentes (colisões). O congestionamento está identificado pelas formações dos *clusters* resultante das ondas *pára-arranca*. O *headway* diminui até desembocar num congestionamento de tráfego, tal como acontece na prática.

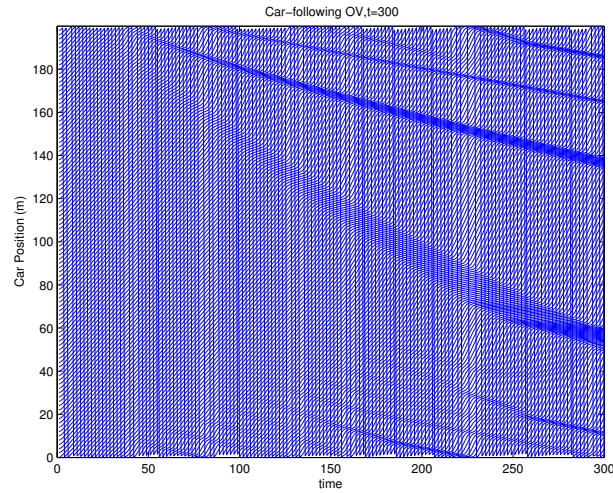


Figura 7.13: (t, x_n) , posições dos 100 veículos na pista circular durante os primeiros 300 segundos

Os *headway* dos veículos oscilam em torno da distância de segurança ($h_c = 2\text{ m}$), ver Figura 7.5a. Os valores inferiores são responsáveis pela formação de *clusters*, ou seja, de congestionamento.

Para valores muito pequenos, a velocidade óptima aproxima-se de zero, o valor mais próximo é $V(\Delta x_{\min}) = V(0.3415) = 0.0340$ m/s (podemos considerar que houve paragem). Por outro lado, a medida que a distância para o veículo da frente aumenta, a velocidade óptima aumenta, o maior valor é $V(\Delta x_{\max}) = V(3.6420) = 1.8918$ m/s.

Na Figura 7.15, ilustramos a flutuação das velocidades dos veículos no tempo, esta flutuação é responsável pela formação dos *clusters*. Ilustramos na Figura 7.16, o perfil das velocidades no instante final que dão informação sobre a formação de 6 *clusters* neste instante. As mesmas conclusões pode-se tirar a partir dos gráficos apresentados na Figura 7.21.

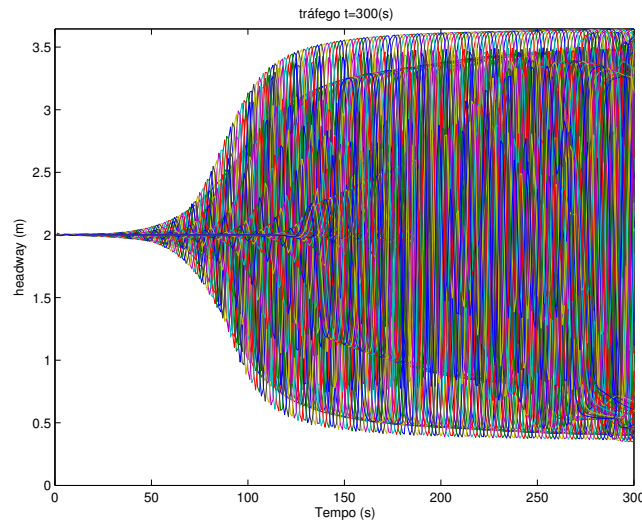


Figura 7.14: *headway* dos veículos durante 300 s.

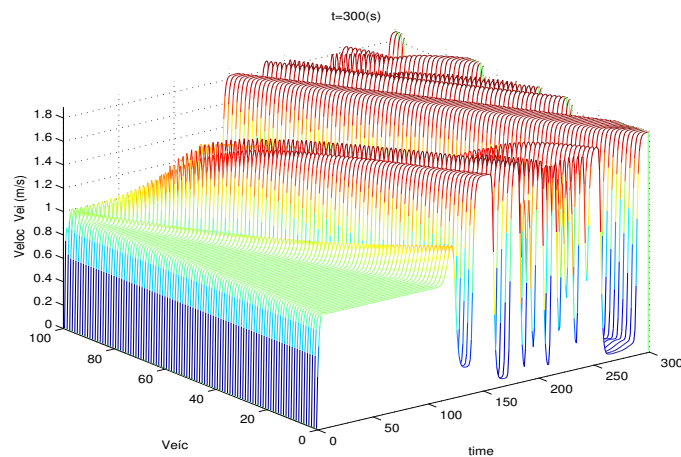


Figura 7.15: Flutuação das velocidades dos veículos ao longo do tempo.

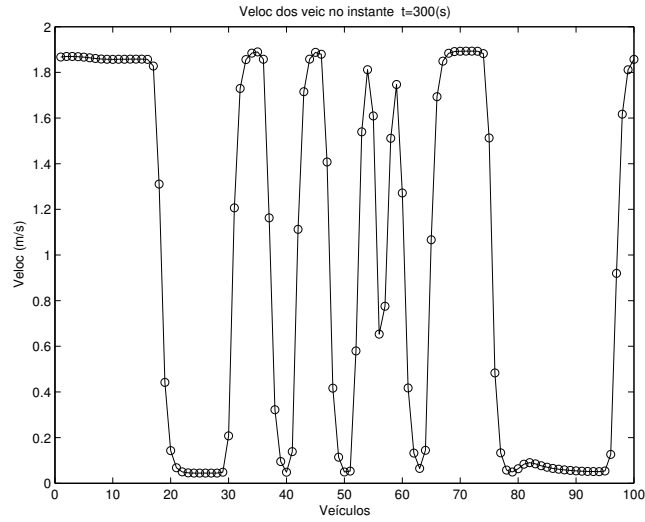


Figura 7.16: Perfil da velocidade dos veículos no instante $t = 300$ s.

Na Figura 7.17, ilustramos a trajetória do décimo veículo, nos casos estável e instável. No primeiro caso, a azul, o veículo move-se a uma velocidade constante fazendo com que a distância cresça de forma linear. No segundo caso, a vermelho, podemos observar que o espaço percorrido pelo veículo é menor do que no caso estável. Pois, no caso instável desacelera/acelera o veículo sistematicamente na medida que vai perdendo/ganhando *headway* (ver Figura 7.18) .

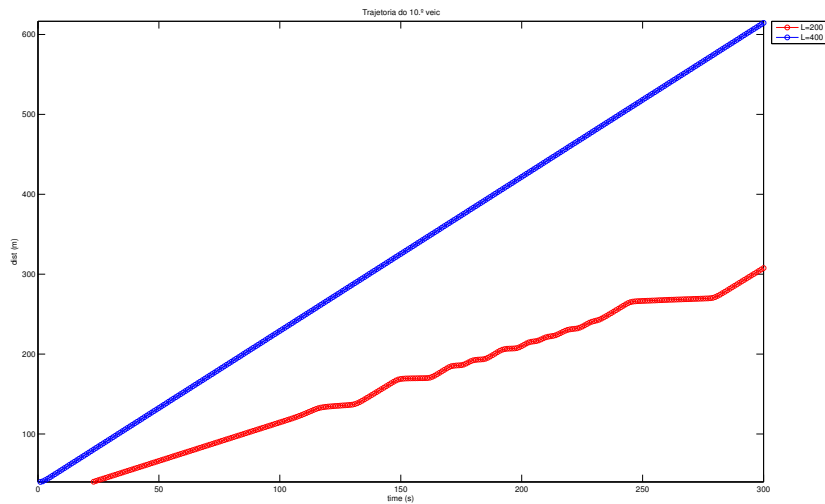


Figura 7.17: Trajetória do décimo veículo no caso estável (a azul) e instável (a vermelho).

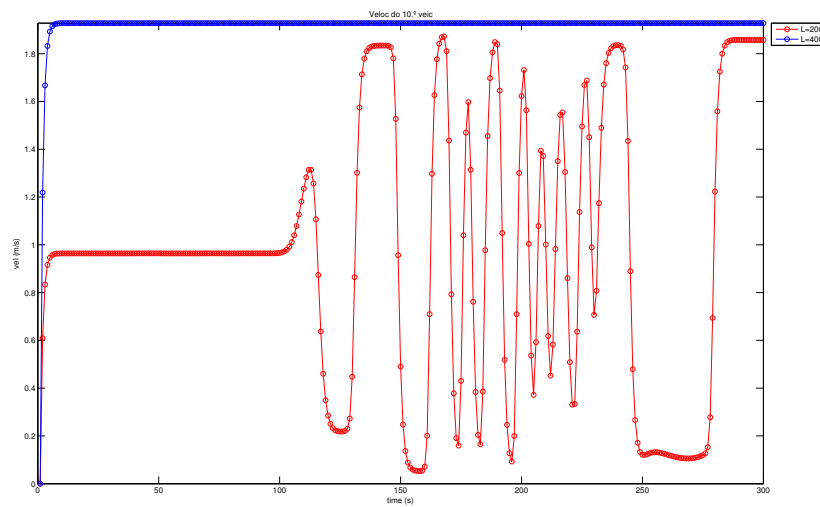


Figura 7.18: Perfil de velocidade do 10.^o veículo. A azul, o caso estável e a vermelho o caso instável

Nas figuras que se seguem (Figura 7.19 e 7.20), ilustramos as trajetórias de todos os veículos. Podemos tirar as mesmas conclusões relativas à Figura 7.10 comparativamente com a Figura 7.19 e da Figura 7.13 comparativamente com a Figura 7.20.

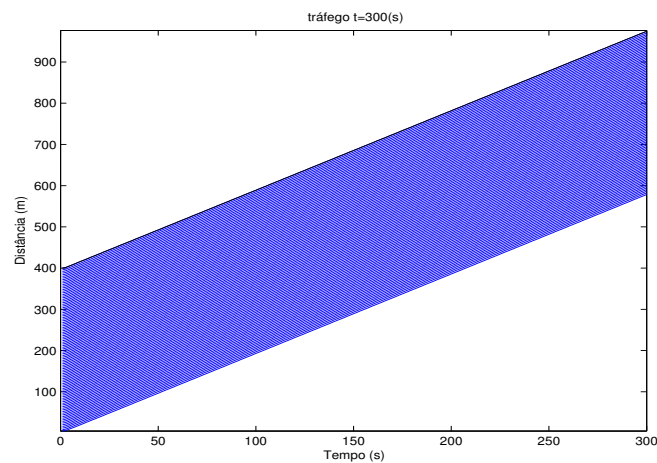


Figura 7.19: Trajetória de todos os veículos (caso estável).

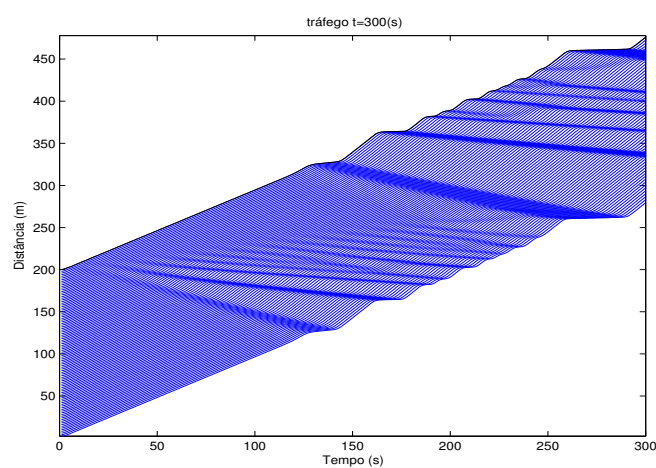
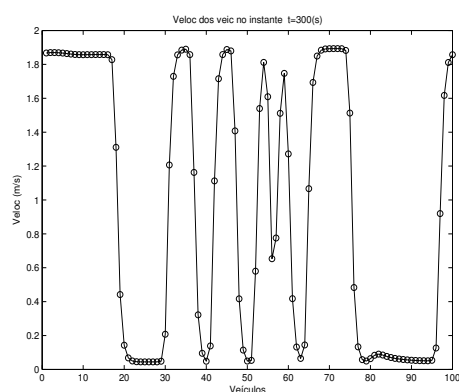
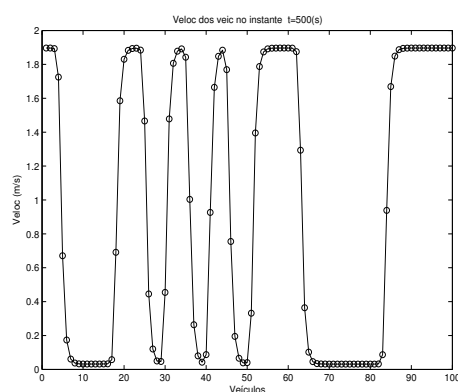


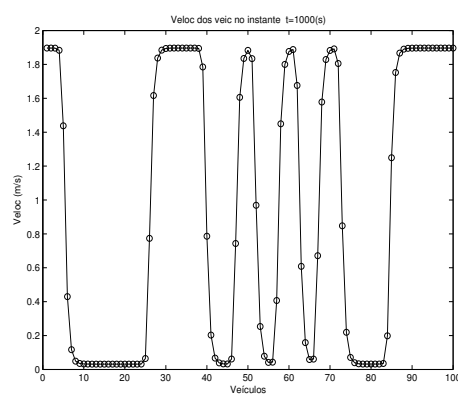
Figura 7.20: Trajetória de todos os veículos (caso instável).



(a)



(b)



(c)

Figura 7.21: Perfil da velocidade de todos os veículos nos instantes (a) $t = 300$ s, (b) $t = 500$ s e (c) $t = 1000$ s.

7.2.2 Breve comparação entre modelos: OV, FVD e GF

Fizemos uma breve comparação dos resultados obtidos levando em consideração os limites de aceleração/desaceleração sugeridos por Helbing e Tilch (1998b). Consideramos as mesmas condições iniciais descritas anteriormente, mas tomamos, desta vez, o comprimento da pista $L = 2000$ e consideramos $\lambda = 0.41$. Usamos a velocidade ótima dada em (5.36). Em todos os modelos podemos ver que há formação de *clusters*. No entanto, este tipo de formação é menos notória no modelo FVD do que nos restantes (ver Figura 7.24). Podemos observar nas Figuras 7.25 e 7.26 que as acelerações estão fora dos limites impostos por Helbing e Tilch (1998b). Neste caso, podemos dizer que o modelo FVD é mais realista.

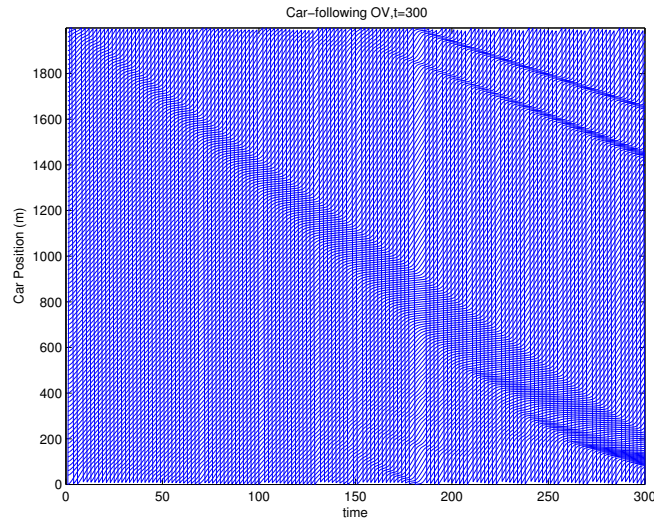


Figura 7.22: (t, x_n) , posições dos 100 veículos obtidos pela implementação do modelo OV ao longo de 300 s.

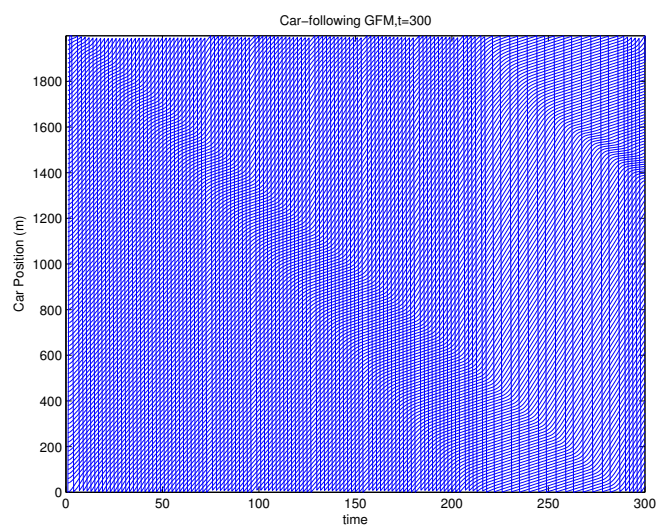


Figura 7.23: (t, x_n) , posições dos 100 veículos obtidos pela implementação do modelo GF ao longo de 300 s.

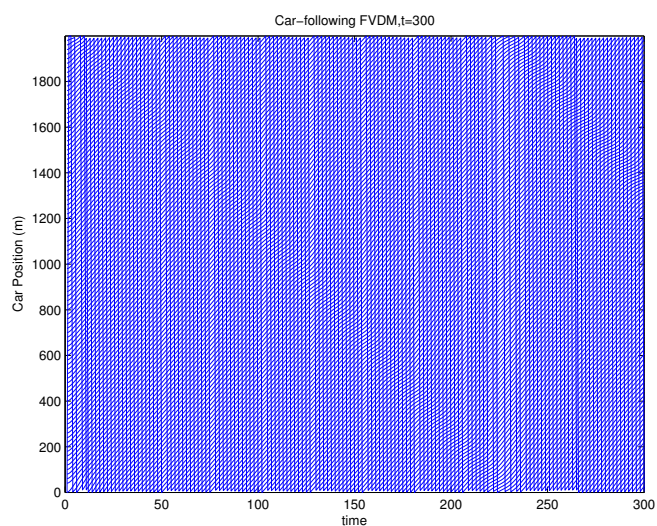


Figura 7.24: (t, x_n) , posições dos 100 veículos obtidos pela implementação do modelo FVD ao longo de 300 s.

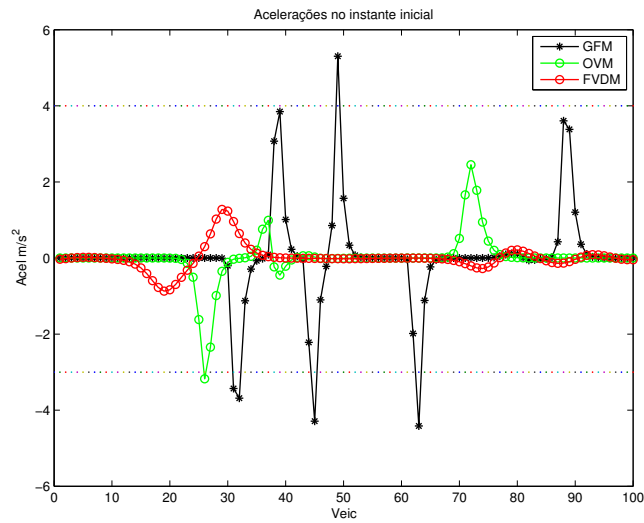


Figura 7.25: Acelerações no instante inicial. A vermelho temos o modelo FVD, a preto o modelo GF e a verde o modelo OV

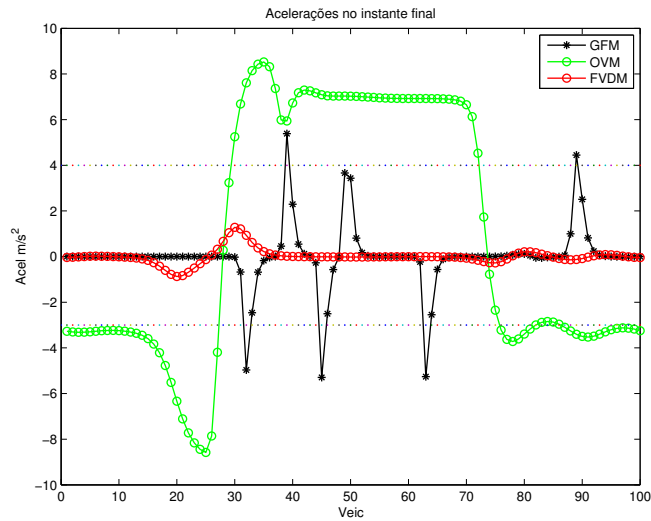


Figura 7.26: Acelerações no instante final. A vermelho temos o modelo, FVD, a preto o modelo GF e a verde o modelo OV

7.2.3 Apreciação global dos resultados

De um modo geral, concluímos que à medida que a densidade média aumenta ($\rho = N/L$), maior é a possibilidade de haver congestionamento, tal como acontece na prática. Isto significa que é possível encontrar o menor valor de L_c a partir do qual podemos garantir que tráfego é sempre estável. Para isto, resolvemos a equação $V'(b) = 0.5$, ou seja,

$$1 - \tanh^2(b - 2) = 0.5,$$

onde $b = \frac{L}{N}$. Deduzimos que $b = \arctan(0.5) + 2 \approx 2.88$ e, portanto, o valor crítico procurado é $L_c = 2.88 \times N$. Isto significa que, em termos globais, sempre que $L < L_c$, o tráfego torna-se instável com o tempo (estável, se $L > L_c$).

Em termos gerais, entendemos que os resultados se adequam ao tráfego real. Estas dinâmicas indicam, claramente, vários regimes de condução real, nomeadamente, arranque, aceleração/desaceleração, pára-arranca, etc..

Capítulo 8

Conclusão e trabalho futuro

8.1 Considerações Finais

Neste trabalho fizemos um estudo sobre a dinâmica de tráfego de veículo. Destacamos as seguintes abordagens: a macroscópica e a microscópica. Vimos que na abordagem macroscópica *aproxima-se* o tráfego de veículos à hidrodinâmica dos fluidos, onde grandezas físicas tais como a velocidade, a densidade e o fluxo, bem como as suas relações mútuas e as leis de conservação de massa e do momento, são os pilares deste tipo de abordagem. Já na abordagem microscópica, o tráfego é considerado como um meio discreto onde os veículos são reduzidos a partículas individuais.

Dos quatro modelos macroscópicos que consideramos para o tráfego de veículos, todos consistem em equações às derivadas parciais hiperbólicas, como podemos verificar a partir dos valores próprios da matriz da jacobiana que são reais e distintos. A importância de serem hiperbólicas deve-se ao facto de, conhecendo as condições iniciais e fronteiras, podermos obter a evolução das ondas que caracterizam a solução no tempo e no espaço. Em termos práticos, significa que podemos prever o tráfego, num determinado local e tempo, partindo de dados iniciais. Vimos algumas das limitações teóricas deste modelos. Por exemplo, apontamos o facto do modelo LWR falhar para o tráfego nos semáforos. Se o veículo estiver parado, significa que a sua velocidade é zero, no entanto o modelo interpreta que a densidade é máxima, o que não é necessariamente verdade. O modelo não captura esta informação de forma adequada. Vimos, através dos valores próprios, que o modelo PW não preserva a propriedade anisotrópica e que o modelo de Zhang apenas preserva esta propriedade, se a velocidade for uma função monótona decrescente com o tempo. O modelo Aw-AR foi concebido de forma a diferenciar o tráfego de veículos do movimento de fluidos (Aw-AR é sempre anisotrópico). Os argumentos apresentados por Aw e Rascle (2000) consistem no facto de que, na hidrodinâmica dos fluidos, as partículas são átomos, moléculas ou iões e, portanto, há que diferenciá-las de veículos, pois, as características dos veículos (uns são mais pacíficos do que os outros) diferem das características das partículas. De um modo geral, os modelos macroscópicos são limitados por considerarem o fluxo como um meio contínuo, pois caso contrário não se pode considerar a forma diferencial para a lei da conservação, por exemplo, de massa. Se o tráfego não for suficientemente denso eles não capturam correctamente as informações.

Em relação aos modelos microscópicos, consideramos os modelos GM e o modelo OV. Todos têm um princípio em comum, que consiste em expressar a aceleração de um veículo como resposta a um conjunto de estímulos. O modelo GM baseia-se no modelo *follow-the-leader* desenvolvido por Pipes. A tendência de um condutor, no modelo GM, é conduzir a uma velocidade igual ao do seu *leading-car*. Pudemos evidenciar, através da simulação numérica, alguns dos traços do regime de condução

real mas, também alguns aspectos irrealistas. O facto de que no modelo GM o *following-car* tender a ajustar a sua velocidade à do seu *leading-car* pode ser um inconveniente, na medida em que interage com o seu *leading-car* mesmo que a distância entre eles seja suficientemente grande. Na prática, um condutor, nestas condições, tende a viajar a uma velocidade livre. O modelo velocidade óptima (OV), proposto por Bando et al. (1995), baseia-se no princípio de que o tráfego é regulado por uma velocidade óptima. No modelo OV, o condutor estabelece uma velocidade óptima, que depende da distância para o veículo da frente. Quando esta distância diminui (aumenta), a velocidade óptima também diminui (aumenta). Quando a distância para o veículo da frente for suficientemente grande, este deixa de interagir com o seu *leading-car*, viajando, portanto, a uma velocidade livre. Nenhum dos modelos está isento de imperfeições. Em termos críticos pudemos ver, através de simulações, que o modelo proposto por Bando gera acelerações irrealistas comparativamente com os dados empíricos obtidos por Helbing, que estabelecem uma aceleração entre -3 m/s^2 a 4 m/s^2 . Outra desvantagem do modelo velocidade óptima é não contemplar transgressores (veículos que transitam a velocidades superiores às permitidas por lei).

Apesar das várias imperfeições (inerentes a qualquer modelo), as simulações revelarem resultados aceitáveis no sentido de que podemos constatar vários aspectos comum presentes no regime de condução real. Entre elas citamos: o arranque, o *pára-arranca*, a aceleração/desaceleração, o congestionamento, a travagem, etc..

O facto de possibilitar a análise individual do movimento de cada veículo mediante uma equação diferencial ordinária, faz dos modelos microscópicos serem mais descritivos do que os macroscópicos e de mais simples interpretação. Os resultados obtidos deixam em aberto muitas questões para aprofundar e muitos desafios futuros. Compreender o tráfego de veículos contribui para compreender o tráfego de peões que é um tema emergente. Na realidade, o presente trabalho começou com o estudo do movimento pedonal.

8.2 Limitações e trabalho futuro

A calibração da velocidade óptima de acordo com o código de estrada português é um desafio. Na Tabela 8.1, apresentamos as distâncias médias de paragem dos veículos segundo as normas portuguesas. No Capítulo 5, vimos a forma geral proposta por Li e Sun (2012) para função velocidade óptima. Apesar disso, não conseguimos relacionar diretamente estes parâmetros com os valores da Tabela. Acreditamos que tal é possível, porém é preciso fazer medições experimentais ou, então, obter dados já existentes.

Velocidades de Circulação		Distâncias Média de Paragem		
km/h	m/s	Reacção (m)	Travagem (m)	Paragem = Dr + Dt
30	8.33	9	4.5	13.5
50	13.89	15	12.5	27.5
70	19.44	21	24.5	45.5
90	25.00	27	40.5	67.5
120	33.33	36	72	108
150	41.67	45	112.5	157.5

Tabela 8.1: Distâncias médias de paragem segundo as normas portuguesas.

Actualmente, vários autores estão interessados no estudo do tráfego de peões. Modelar o movimento e o comportamento de peões pode ajudar engenheiros na redução de números de mortes que ocorrem

em espaços públicos onde há grande fluxo de peões. Estudos empíricos revelaram que as pessoas se movem de forma involuntária quando se sentem apertados num dado meio (Yu e Johansson, 2007). Este comportamento faz aumentar a interacção entre os peões em meios cujo densidade é extrema, podendo desencadear uma instabilidade no fluxo. Yu e Johansson (2007) realçam que, quando a densidade média aumenta, subitamente observa-se o fenómeno de transição de fluxo denominado de *laminar*, *pára-arranca* e *turbulento*.

Os primeiros estudos para o movimento pedonal tiveram por base as teorias existentes para o tráfego de veículos e adaptá-las de forma a produzirem modelos para o movimento pedonal. Na sequência evolutiva destes modelos, surgiu o chamado *modelo* social de forças (tradução da expressão “social force model”) que tem como percussores Helbing e Molnar (1995). A ideia é modelar o comportamento de um peão ordinário no contexto social. O modelo considera cada peão como uma partícula Newtoniana sujeitas às forças físicas e sociais. Na sua forma mais simples, é dado pela equação:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{f}_i(t) \quad (8.1)$$

onde $\vec{f}_i(t)$ é a força de aceleração de peão i que é dada por:

$$\vec{f}_i(t) = m_i \frac{1}{\tau} (v_i^0 \vec{e}_i - \vec{v}_i) + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}(t), \quad (8.2)$$

onde

- $m_i \frac{1}{\tau} (v_i^0 \vec{e}_i - \vec{v}_i)$ é a componente que modela a vontade de cada indivíduo de alcançar um destino com uma dada velocidade v_i^0 . A direcção desejada é \vec{e}_i , e o desvio para a velocidade actual \vec{v}_i , da velocidade desejada $\vec{v}_i^0 = v_i^0 \vec{e}_i$ é corrigida dentro de um tempo de relaxação τ . A direcção desejada é descrita por

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{p} - \vec{r}_i}{\|\vec{p} - \vec{r}_i\|}, \quad (8.3)$$

onde \vec{p} é o destino desejado e \vec{r}_i é a posição actual.

- A força repulsiva \vec{f}_{ij} descreve a interacção entre dois peões i e j , e o desejo do peão i em manter uma distância segura do peão j , e é dada por

$$\vec{f}_{ij} = A_\alpha^1 \exp \left[\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B_\alpha^1} \right) \right] \vec{e}_{ij} F_{ij} + A_\alpha^2 \exp \left[\left(\frac{r_{ij} - d_{ij}}{B_\alpha^2} \right) \right] \vec{e}_{ij}, \quad (8.4)$$

onde o primeiro termo descreve a tendência para respeitar a esfera privada de cada peão e ajuda a evitar o contacto. O segundo termo leva em consideração as interações em meios muito densos. Os parâmetros A_α^i e B_α^i denotam a força de interacção. O parâmetro d_{ij} denota a distância entre os centros de massa do peão i ao peão j . Finalmente, \vec{F}_{ij} é responsável pelo o comportamento anisotrópico do peão na medida em que apenas reage aos estímulos frontais.

Uma extensão de (8.2) foi proposta por Helbing et al. (2000). Esta extensão inclui outros fenómenos que afetam os movimentos do peão, por exemplo:

- forças de atracção, que leva em consideração o facto do peão ser atraído, quando caminha, por grupos (família, amigos etc.), montras e entre outros estímulos.
- força de repulsão inerente a outros obstáculos físicos (por exemplo, a parede).

O estudo do movimento pedonal é o próximo objectivo.

Capítulo 9

Apêndice

Rotinas para o modelo GM

```
! -----
!  
!      Car Following Model  
!  
! -----  
  
PROGRAM CFM  
IMPLICIT NONE  
  
! n: numero de veiculos  
! x(1), x(2), ..., x(n-1): following car  
! x(1) < x(2) < ... < x(n-1)  
!  
  
INTEGER n, nm1, Number_iterations, OTS, iter, distancia_entre_carros, comprimento_carro  
INTEGER i, Number_outputs  
  
PARAMETER (n=25, nm1=n-1)  
  
REAL*8, DIMENSION (1:nm1):: x, xl, d  
REAL*8:: c, Time_MAX, dt, TOL, OutPutTimeStep, a, b, time, PositionLeadingCar  
  
PARAMETER (c=1.d0)  
PARAMETER (dt=1.d-4)  
PARAMETER (Time_MAX=60)  ! segundos  
PARAMETER (TOL=1.d-12)  
  
PARAMETER (distancia_entre_carros = 20)  
PARAMETER (comprimento_carro = 4)  
PARAMETER (Number_iterations = DINT(Time_MAX/dt + TOL))  
PARAMETER (OutPutTimeStep = 6.D0)  ! segundos  
PARAMETER (OTS = DINT(OutPutTimeStep/dt+TOL), Number_outputs = Number_iterations/OTS)
```

```

REAL*4:: matriz(0:Number_outputs, 1:n)

print*, Number_iterations, OTS

CALL INITIAL_POS_VEL(x, xl, distancia_entre_carros, comprimento_carro, nm1)
i = 0
matriz(i,1:nm1) = x(1:nm1); matriz(i,n) = PositionLeadingCar(0.D0)
CALL CALCULA_D (d, x, xl, c, nm1)

DO iter = 1, Number_iterations
  time = DFLOAT(iter)*dt
  CALL NextTimeStep_RK4 (x, time, dt, c, d, nm1)
  IF (MOD(iter,OTS) == 0) THEN
    PRINT*, time
    i = i + 1
    matriz(i,1:nm1) = x(1:nm1); matriz(i,n) = PositionLeadingCar(time)
  END IF
END DO

CALL GRAFICOS(matriz, Number_outputs, n, nm1, dt, OTS, Time_MAX)

print*,matriz(Number_outputs,:)

END PROGRAM CFM

```

! -----

```

SUBROUTINE GRAFICOS(matriz, Number_outputs, n, nm1, dt, OTS, Time_MAX)
IMPLICIT NONE
INTEGER Number_outputs, n, nm1, OTS, PGBEG, IER, car, i
REAL*4:: matriz(0:Number_outputs, 1:n), tempos(0:Number_outputs)
REAL*8:: time, PositionLeadingCar, Time_MAX, dt

! All cars s.t. xx(1:n-1) = x(1:n-1) and xx(n) = leading car

REAL*4 XMIN, XMAX, YMIN, YMAX

  XMIN= matriz(0,1)
  XMAX= PositionLeadingCar(Time_MAX)
  YMIN= 0.0
  YMAX= Time_MAX

  !IER=PGBEG(0,'/xserve',1,1)
  !IER=PGBEG(0,'?',1,1)
  IER=PGBEG(0,'?',1,1)
  CALL PGASK (.TRUE.)
  IF(IER.NE.1) STOP

  CALL PGENV(xmin, xmax, ymin, ymax, 0, 0)

```

```

      CALL PGLAB('(position)', '(time)', 'Car Following Model')

DO i = 0, Number_outputs
  tempos(i) = i * OTS * dt
END DO

DO car = 1, n
  CALL PGLINE(Number_outputs+1, matriz(:, car), tempos)
END DO

!      CALL PGEND

RETURN
END SUBROUTINE GRAFICOS
! -----

SUBROUTINE NextTimeStep_RK4 (x, t, dt, c, d, nm1)
IMPLICIT NONE
INTEGER nm1
REAL*8 x(nm1), d(nm1), dt, c, t
REAL*8 k1(nm1), k2(nm1), k3(nm1), k4(nm1)

CALL F(k1, x, d, t, c, nm1)
k1 = dt*k1

CALL F(k2, x + k1/2.D0, d, t + dt/2.D0, c, nm1)
k2 = dt*k2

CALL F(k3, x + k2/2.D0, d, t + dt/2.D0, c, nm1)
k3 = dt*k3

CALL F(k4, x + k3, d, t + dt, c, nm1)
k4 = dt*k4

x = x + (k1+k4)/6.D0 + (k2+k3)/3.D0

RETURN
END SUBROUTINE NextTimeStep_RK4
! -----

SUBROUTINE F(fx, x, d, t, c, nm1)
IMPLICIT NONE
INTEGER nm1, k
REAL*8 x(nm1), fx(nm1), d(nm1), t, c, PositionLeadingCar

DO k = 1, nm1-1
  fx(k) = c*DLOG( x(k+1) - x(k) ) + d(k)

```

END DO

fx(nm1) = c*DLOG(PositionLeadingCar(t) - x(nm1)) + d(nm1)

RETURN

END SUBROUTINE F

! -----

SUBROUTINE INITIAL_POS_VEL(x, xl, distancia_entre_carros, comprimento_carro, nm1)

IMPLICIT NONE

INTEGER:: nm1, i, seed, opcao, distancia_entre_carros, comprimento_carro

REAL*8, DIMENSION (1:nm1):: x, xl

REAL*8 a, b, Dist_Uniforme, Delta

seed = 23

opcao = 1

Delta = distancia_entre_carros + comprimento_carro

DO i = 1, nm1

 a = (i-1)*Delta

 b = i*Delta

 x(i) = Dist_Uniforme(seed, a, b, opcao)

 xl(i) = 25.d0 + Dist_Uniforme(seed, -1.D0, 1.D0, opcao)

END DO

RETURN

END SUBROUTINE INITIAL_POS_VEL

! -----

SUBROUTINE CALCULA_D (d, x, xl, c, nm1)

IMPLICIT NONE

INTEGER:: nm1, k

REAL*8, DIMENSION (1:nm1):: x, xl, d

REAL*8:: c, PositionLeadingCar

DO k = 1, nm1-1

 d(k) = xl(k) - c*DLOG(x(k+1) - x(k))

END DO

d(nm1) = xl(nm1) - c*DLOG(PositionLeadingCar(0.D0) - x(nm1))

RETURN

END SUBROUTINE CALCULA_D

! -----

```

REAL*8 FUNCTION PositionLeadingCar(t)
IMPLICIT NONE
REAL*8 t

```

```

PositionLeadingCar = 565.d0 + 20.d0*t

```

```

RETURN
END FUNCTION PositionLeadingCar

```

```

! -----

```

```

REAL*8 FUNCTION VelocityLeadingCar(t)
IMPLICIT NONE
REAL*8 t

```

```

VelocityLeadingCar =25.D0

```

```

RETURN
END FUNCTION VelocityLeadingCar

```

```

! -----

```

```

REAL*8 FUNCTION Dist_Uniforme(seed, a, b, opcao)
IMPLICIT NONE
REAL*8 a, b
INTEGER seed, opcao

```

```

IF (opcao == 1) THEN
    CALL SRAND(seed); opcao = 2
END IF

```

```

Dist_Uniforme = a + (b-a)*RAND()

```

```

RETURN
END FUNCTION Dist_Uniforme

```

```

! -----

```

Rotinas para modelo OV

Programa principal

```

close all;clc;
global a;
N=100;
L=2000;

```

```

a=1;
dt=1.E-4;
b=L/N;

Time_MAX =300;
OutPutTimeStep = 1.0; %segundos
TOL=1.E-4;
tout=[0];

Z=OV_init_cond_teste(N,L);

zout=[Z];

Number_iterations = round(Time_MAX/dt + TOL)
OTS = round(OutPutTimeStep/dt+TOL); %

for iter = 1:Number_iterations

    Z=RK4OV(Z,dt,a,N,L);

    if (mod(iter,OTS)) == 0
        time = iter*dt;
        zout=[zout Z];
        tout=[tout time];
    end

end

Xall=zout(1:N,:);
Xalll=mod(Xall,L);

figure;
plot(Xalll','b')
xlabel('time')
ylabel('Car Position (m)')
title(['Car-following OV,t=',num2str(Time_MAX)])
axis([0 Time_MAX min(min(Xalll)) max(max(Xalll))] %max(max(tout))

figure;
Vall=zout(N+1:2*N,:);
plot(Vall')
%axis([0 Time_MAX min(min(Vall)) max(max(Vall))])
ylabel('Car Veloc (m/s)')
xlabel('time (s)')
title(['Car-following OV t=',num2str(Time_MAX)])

figure;

```



```

plot(Vall(1:N,Time_MAX)', 'ko')
hold on
plot(Vall(1:N,Time_MAX)')

xlabel('Veículos')
ylabel('Veloc (m/s)')
title(['Veloc dos veic no instante t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])
%axis([0 N min(min(Vall)) max(max(Vall))] %max(max(tout))

figure;
%mesh(Xall)
waterfall(Xall)
axis auto
xlabel('time (s)')
ylabel('Veículos')
zlabel('Distância')
title(['t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])

figure;
%mesh(Vall)
waterfall(Vall)
xlabel('time')
ylabel(' Veíc')
zlabel('Veloc Vei (m/s)')
title(['t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])

figure;
plot(Xall(:,1:end-1)', 'b') % following cars
hold on
plot(Xall(N,:), 'k', 'LineWidth', 0.75) % posição do leading car
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Distância (m)')
title([' tráfego t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])
axis([0 Time_MAX min(min(Xall)) max(max(Xall))])

headway=Xall(2:end,:)-Xall(1:end-1,:);
figure
plot(headway(2:end,1:end)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('headway (m)')
title([' tráfego t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])
axis([0 Time_MAX min(min(headway)) max(max(headway))])

M=max(max(headway))
m=min(min(headway))
CMax=Vj(M)
Cmin=Vj(m)
V=max(max(Vall));
v=min(min(Vall));

```

```

figure
plot(Vj(headway(:,Time_MAX)'), 'k')
hold on
plot(Vall(:,Time_MAX)', 'r')
xlabel('Vel m/s')
ylabel('t (s)')
title(['tráfego t=', num2str(Time_MAX), '(s)'])
%axis([0 N min(min(Vall)) max(max(Vall))])
legend('OV', 'V')
head=headway(2:end,:);
v=Vall(1:end-1,:);

```

Condições iniciais

```

function Zinit=OV_init_cond_teste(N,L);
global b; b=L/N;
c=Vj(b);
Zinit=zeros(2*N,1);
Z(1)=b+random('uniform', -b/4, b/4, 1, 1);
Zinit(2:N)=b.*(2:N); %+random('uniform', -b/4, b/4, 1, N);
Zinit(N+1:2*N)=0;
end
%Zinit(1:N)=b.*(1:N)+random('uniform', -b/4, b/4, 1, N);

```

Runge-kutta

```

function Znew=RK4OV(Z,dt,a,N,L);
K1=FF(Z,a,N,L);
K2=FF(Z+0.5*dt*K1,a,N,L);
K3=FF(Z+0.5*dt*K2,a,N,L);
K4=FF(Z+dt*K3,a,N,L);
Znew=Z+dt*(K1+2*(K2+K3)+K4)/6;
end

```

Função Velocidade ótima

```

function Vout=Vj(dx);
% v1=6.75; v2=7.91; c1=0.13; c2=1.57; lc=5;
% Vout=v1+v2*tanh(c1*(dx-lc)-c2);
Vout=tanh(dx-2)+tanh(2);
end

```

Equação

```
function Zdot=FF(Z,a,N,L);
X=Z(1:N);
Y=Z(N+1:2*N);
[Xdot Ydot]=F(X,Y,a,N,L);
Zdot=[Xdot;Ydot];
end
```

```
function [Xdot Ydot]=F(x,y,a,N,L);
Xdot=y;
Ydot=a*(Vj(x(2:N)-x(1:N-1))-y(1:N-1));
Ydot(N)=a*(Vj(x(1)-x(N)+L)-y(N));
end
```

Rotinas para modelo GFM

Programa Principal

```
close all;clc;
global a;
N=100;
L=2000;

a=1;
dt=1.E-4;
b=L/N;

Time_MAX =300;
OutPutTimeStep = 1.0; %segundos
TOL=1.E-4;
tout=[0];

Z=GF_init_cond_teste(N,L);

zout=[Z];

Number_iterations = round(Time_MAX/dt + TOL)
OTS = round(OutPutTimeStep/dt+TOL); %

for iter = 1:Number_iterations

    Z=RK4GF(Z,dt,a,N,L);

    if (mod(iter,OTS)) == 0
        time = iter*dt;
        zout=[zout Z];
        tout=[tout time];
    end
```

end

```
XallGFM=zout(1:N,:);
XalllGFM=mod(XallGFM,L);
VallGFM=zout(N+1:2*N,:);
```

```
figure;
plot(XalllGFM','b')
xlabel('time')
ylabel('Car Position (m)')
title(['Car-following GFM,t=',num2str(Time_MAX )])
axis([0 Time_MAX min(min(XalllGFM)) max(max(XalllGFM))]) %max(max(tout))
```

```
figure;
plot(VallGFM')
%axis([0 Time_MAX min(min(Vall)) max(max(Vall))])
ylabel('Car Veloc (m/s)')
xlabel('time (s)')
title(['Car-following GFM t=',num2str(Time_MAX )])
```

```
figure;
plot(VallGFM(1:N,Time_MAX)','ko')
hold on
plot(VallGFM(1:N,Time_MAX)')
xlabel('Veículos')
ylabel('Veloc (m/s)')
title(['Veloc dos veic no instante t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
%axis([0 N min(min(Vall)) max(max(Vall))]) %max(max(tout))
```

```
figure;
%mesh(Xall)
waterfall(XallGFM)
axis auto
xlabel('time (s)')
ylabel('Veículos')
zlabel('Distância')
title(['t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
```

```
figure;
%mesh(Vall)
waterfall(VallGFM)
xlabel('time')
ylabel(' Veic')
zlabel('Veloc Vei (m/s)')
title(['t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
```

```
figure;
plot(XallGFM(:,1:end-1)','b') % following cars
```

```

hold on
plot(XallGFM(N,:),'k','LineWidth',0.75) % posição do leading car
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Distância (m)')
title([' tráfego t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
axis([0 Time_MAX min(min(XallGFM)) max(max(XallGFM))])

headway=XallGFM(2:end,:)-XallGFM(1:end-1,:);
figure
plot(headway(2:end,1:end)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('headway (m)')
title([' tráfego t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
axis([0 Time_MAX min(min(headway)) max(max(headway))])

M=max(max(headway))
m=min(min(headway))
CMax=Vj(M)
Cmin=Vj(m)
V=max(max(VallGFM));
v=min(min(VallGFM));

figure
plot(Vj(headway(:,Time_MAX)'),'k')
hold on
plot(VallGFM(:,Time_MAX)'),'r')
xlabel('Vel m/s')
ylabel('t (s)')
title([' tráfego t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
%axis([0 N min(min(Vall)) max(max(Vall))])
legend('OV','V')
head=headway(2:end,:);
v=VallGFM(1:end-1,:);

```

Condições iniciais

```

function Zinit=GF_init_cond_teste(N,L);
global b; b=L/N;
c=Vj(b);
Zinit=zeros(2*N,1);
Z(1)=b+random('uniform',-b/4,b/4,1,1);
Zinit(2:N)=b.*(2:N);%+random('uniform',-b/4,b/4,1,N);
Zinit(N+1:2*N)=0;
end
%Zinit(1:N)=b.*(1:N)+random('uniform',-b/4,b/4,1,N);

```

Runge-kutta

```
function Znew=RK4GF(Z,dt,a,N,L);
K1=FF(Z,a,N,L);
K2=FF(Z+0.5*dt*K1,a,N,L);
K3=FF(Z+0.5*dt*K2,a,N,L);
K4=FF(Z+dt*K3,a,N,L);
Znew=Z+dt*(K1+2*(K2+K3)+K4)/6;
end
```

Função Velocidade ótima

```
function Vout=Vj(dx);
%Helbing and Tilch
v1=6.75;v2=7.91;c1=0.13;c2=1.57;lc=5;
Vout=v1+v2*tanh(c1*(dx-lc)-c2);
end
```

Equação

```
function [XdotGF YdotGF]=F_G(x,y,a,N,L);
XdotGF=y;
lambda=0.41;
Deltax=x(2:N)-x(1:N-1);
Deltav=y(2:N)-y(1:N-1);
YdotGF=a*(Vj(Deltax)-y(1:N-1))+lambda*heaviside(-Deltav).*Deltav;
YdotGF(N)=a*(Vj(x(1)-x(N)+L)-y(N));
end
```

```
function Zdot=FF_G(Z,a,N,L);
X=Z(1:N);
Y=Z(N+1:2*N);
[XdotGF YdotGF]=F_G(X,Y,a,N,L);
Zdot=[XdotGF;YdotGF];
end
```

Rotinas para o modelo FVD

Programa principal

```
close all;clc;
global a;
N=100;
L=2000;

a=1;
dt=1.E-4;
```

```

b=L/N;
tau=0.0000;

Time_MAX =300;
OutPutTimeStep = 1.0; %segundos
TOL=1.E-4;
tout=[0];

Z=FVD_init_cond_teste(N,L);

zout=[Z];

Number_iterations = round(Time_MAX/dt + TOL)
OTS = round(OutPutTimeStep/dt+TOL); %

for iter = 1:Number_iterations

    Z=RK4FVD(Z,dt,a,N,L);

    if (mod(iter,OTS)) == 0
        time = iter*dt;
        zout=[zout Z];
        tout=[tout time];
    end

end

XallFVD=zout(1:N,:);
XalllFVD=mod(XallFVD,L);

figure;
plot(XalllFVD','b')
xlabel('time')
ylabel('Car Position (m)')
title(['Car-following FVDM,t=',num2str(Time_MAX )])
axis([0 Time_MAX min(min(XalllFVD)) max(max(XalllFVD))]) %max(max(tout))

figure;
VallFVD=zout(N+1:2*N,:);
plot(VallFVD')
%axis([0 Time_MAX min(min(Vall)) max(max(Vall))])
ylabel('Car Veloc (m/s)')
xlabel('time (s)')
title(['Car-following FVDM t=',num2str(Time_MAX )])

%
figure;
plot(VallFVD(1:N,Time_MAX)','ko')

```

```

hold on
plot(VallFVD(1:N,Time_MAX))
xlabel('Veículos')
ylabel('Veloc (m/s)')
title(['Veloc dos veic no instante t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
%axis([0 N min(min(Vall)) max(max(Vall))] %max(max(tout))

figure;
%mesh(Xall)
waterfall(XallFVD)
axis auto
xlabel('time (s)')
ylabel('Veículos')
zlabel('Distância')
title(['t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])

figure;
%mesh(Vall)
waterfall(VallFVD)
xlabel('time')
ylabel(' Veíc')
zlabel('Veloc Veíc (m/s)')
title(['t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])

figure;
plot(XallFVD(:,1:end-1),'b') % following cars
hold on
plot(XallFVD(N,:),'k','LineWidth',0.75) % posição do leading car
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Distância (m)')
title([' tráfego t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
axis([0 Time_MAX min(min(XallFVD)) max(max(XallFVD))])

headway=XallFVD(2:end,:)-XallFVD(1:end-1,:);
figure;
plot(headway(2:end,1:end))
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('headway (m)')
title([' tráfego t=',num2str(Time_MAX ), '(s)'])
axis([0 Time_MAX min(min(headway)) max(max(headway))])

M=max(max(headway))
m=min(min(headway))
CMax=Vj(M)
Cmin=Vj(m)
V=max(max(VallFVD));
v=min(min(VallFVD));

figure;

```



```

plot(Vj(headway(:,Time_MAX)'), 'k')
hold on
plot(VallFVD(:,Time_MAX)', 'r')
xlabel('Vel m/s')
ylabel('t (s)')
title([' tráfego t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])
%axis([0 N min(min(Vall)) max(max(Vall))])
legend('OV', 'V')
head=headway(2:end,:);
v=VallFVD(1:end-1,:);
%
headway=Xall(2:end,:)-Xall(1:end-1,:);
vhead=Vj(Xall(2:end,:)-Xall(1:end-1,:));
%
figure;
plot(headway', vhead')
xlabel('headway (s)')
ylabel('veloc (m/s)')
title([' tráfego t=', num2str(Time_MAX ), ' (s)'])
%axis([0 0 max(max(headway)) 0 max(max(vhead))])

```

Condições iniciais

```

function Zinit=FVD_init_cond_teste(N,L);
global b; b=L/N;
c=Vj(b);
Zinit=zeros(2*N,1);
Z(1)=b+random('uniform', -b/4, b/4, 1, 1);
Zinit(2:N)=b.*(2:N);
Zinit(N+1:2*N)=0;
end

```

Runge-kutta

```

function Znew=RK40V(Z,dt,a,N,L);
K1=FF(Z,a,N,L);
K2=FF(Z+0.5*dt*K1,a,N,L);
K3=FF(Z+0.5*dt*K2,a,N,L);
K4=FF(Z+dt*K3,a,N,L);
Znew=Z+dt*(K1+2*(K2+K3)+K4)/6;
end

```

Função Velocidade ótima

```

function Vout=Vj(dx);
%Helbing and Tilch
v1=6.75;v2=7.91;c1=0.13;c2=1.57;lc=5;
Vout=v1+v2*tanh(c1*(dx-lc)-c2);

```

end

Equação

```
function [XdotFVD YdotFVD]=FVD(x,y,a,N,L);
    XdotFVD=y;
    lambda=0.41;
    Deltax=x(2:N)-x(1:N-1);
    Deltav=y(2:N)-y(1:N-1);
    YdotFVD=a*(Vj(Deltax)-y(1:N-1))+lambda*Deltav;
    YdotFVD(N)=a*(Vj(x(1)-x(N)+L)-y(N));
end
```

```
function Zdot=FFVD(Z,a,N,L);
    X=Z(1:N);
    Y=Z(N+1:2*N);
    [XdotFVD YdotFVD]=FVD(X,Y,a,N,L);
    Zdot=[XdotFVD;YdotFVD];
end
```

Bibliografia

- Al-nasur, S. and Kachroo, P. (2006). A microscopic-to-macroscopic crowd dynamic model. In *Intelligent Transportation Systems Conference, 2006. ITSC'06. IEEE*, pages 606-611. IEEE.
- Aw, A. and Rascle, M. (2000). Resurrection of "second order" models of traffic flow. *SIAM journal on applied mathematics*, 60(3):916-938.
- Bando, M., Hasebe, K., Nakanishi, K., and Nakayama, A. (1998). Analysis of optimal velocity model with explicit delay. *arXiv preprint patt-sol/9805002*.
- Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., and Sugiyama, Y. (1995). Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation. *Physical Review E*, 51:1035-1042.
- Brackstone, M. and McDonald, M. (1999). Car-following: a historical review. *Transportation Research Part F: Traffic Psychology and Behaviour*, 2(4):181-196.
- Chandler, R. E., Herman, R., and Montroll, E. W. (1958). Traffic dynamics: studies in car following. *Operations research*, 6(2):165-184.
- Chung, S. B., Song, K. H., Hong, S.-Y., and Kho, S. Y. (2005). Development of sensitivity term in car-following model considering practical driving behavior of preventing rear end collision. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 6:1354-1367.
- Daganzo, C. F. (1995). Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow. *Transportation Research Part B: Methodological*, 29(4):277-286.
- Darbha, S., Rajagopal, K., and Tyagi, V. (2008). A review of mathematical models for the flow of traffic and some recent results. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(3):950-970.
- Edie, L. C. (1961). Car-following and steady-state theory for noncongested traffic. *Operations Research*, 9(1):66-76.
- Gasser, I., Siritto, G., and Werner, B. (2004). Bifurcation analysis of a class of car following traffic models. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 197(3):222-241.

- Gazis, D. C., Herman, R., and Potts, R. B. (1959). Car-following theory of steady-state traffic flow. *Operations Research*, 7(4):499-505.
- Gazis, D. C., Herman, R., and Rothery, R. W. (1961). Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow. *Operations Research*, 9(4):545-567.
- Ge, H., Cheng, R., and Li, Z. (2008). Two velocity difference model for a car following theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(21):5239-5245.
- Ge, H., Dai, S., Dong, L., and Xue, Y. (2004). Stabilization effect of traffic flow in an extended car-following model based on an intelligent transportation system application. *Physical Review E*, 70(6):066134.
- Gipps, P. G. (1981). A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 15(2):105-111.
- Gong, H., Liu, H., and Wang, B.-H. (2008). An asymmetric full velocity difference car-following model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(11):2595-2602.
- Greenshields, B. D., George, H., Guerin, N., Palmer, M., and Underwood, R. (1961). Quality and theory of traffic flow-a symposium.
- Helbing, D., Farkas, I., and Vicsek, T. (2000). Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407(6803):487-490.
- Helbing, D. and Molnar, P. (1995). Social force model for pedestrian dynamics. *Physical review E*, 51(5):4282.
- Helbing, D. and Tilch, B. (1998a). Generalized force model of traffic dynamics. *Phys. Rev. E*, 58:133-138.
- Helbing, D. and Tilch, B. (1998b). Generalized force model of traffic dynamics. *Physical Review E*, 58(1):133.
- Herman, R., Montroll, E. W., Potts, R. B., and Rothery, R. W. (1959). Traffic dynamics: analysis of stability in car following. *Operations research*, 7(1):86-106.
- Herman, R. and Potts, R. (1961). Proceedings-symposium on theory of traffic flow. *Elsevier*.
- Jiang, R., Wu, Q.-S., and Zhu, Z.-J. (2002). A new continuum model for traffic flow and numerical tests. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(5):405-419.
- Jun-Fang, T., Bin, J., and Xing-Gang, L. (2011). A new car following model: comprehensive optimal velocity model. *Communications in Theoretical Physics*, 55(6):1119.

- Kachroo, P., Al-Nasur, S., Wadoo, S., and Shende, A. (2008). *Pedestrian dynamics: Feedback control of crowd evacuation*. Springer.
- Kerner, B. S. and Konhäuser, P. (1994). Structure and parameters of clusters in traffic flow. *Physical Review E*, 50(1):54.
- Klingsch, W., Rogsch, C., Schadschneider, A., and Schreckenberg, M. (2010). *Pedestrian and evacuation dynamics 2008*. Springer.
- Li, Y. and Sun, D. (2012). Microscopic car-following model for the traffic flow: the state of the art. *Journal of Control Theory and Applications*, 10(2):133-143.
- Lighthill, M. and Whitham, G. (1955a). On kinematic waves. i. flood movement in long rivers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178):281-316.
- Lighthill, M. J. and Whitham, G. B. (1955b). On kinematic waves. ii. a theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178):317-345.
- Mehmood, A., Saccomanno, F., and Hellinga, B. (2001). Evaluation of a car-following model using systems dynamics. In *Proceedings of 19th International System Dynamics conference held in AtlantaUSA*.
- Morgan, J. V. (2002). *Numerical methods for macroscopic traffic models*. PhD thesis, University of Reading.
- Olstam, J. J. and Tapani, A. (2004). *Comparison of Car-following models*. Swedish National Road and Transport Research Institute.
- Orosz, G., Wilson, R. E., and Krauskopf, B. (2004). Global bifurcation investigation of an optimal velocity traffic model with driver reaction time.
- Pipes, L. A. (1953). An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of applied physics*, 24(3):274-281.
- Ranjitkar, P., Nakatsuji, T., Azuta, Y., and Gurusinghe, G. S. (2003). Stability analysis based on instantaneous driving behavior using car-following data. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1852(1):140-151.
- Ranjitkar, P., Nakatsuji, T., and Kawamua, A. (2005). Car-following models: an experiment based benchmarking. *Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies*, 6:1582-1596.
- Rascle, M. (2002). An improved macroscopic model of traffic flow: derivation and links with the lighthill-whitham model. *Mathematical and computer modelling*, 35(5):581-590.
- Richards, P. I. (1956). Shock waves on the highway. *Operations research*, 4(1):42-51.

- Sun, D., Li, Y., and Tian, C. (2010). Car-following model based on the information of multiple ahead & velocity difference. *Syst. Eng. Theory Prac*, 30(7):1326-1332.
- Tampère, C. M. (2004). Human-kinetic multiclass traffic flow theory and modelling. *Civil Engineering and Geosciences, Department Transport & Planning*, page 309.
- Tao, W., Zi-You, G., and Xiao-Mei, Z. (2006). Multiple velocity difference model and its stability analysis.
- Treiber, M., Hennecke, A., and Helbing, D. (1999). Derivation, properties, and simulation of a gas-kinetic-based, nonlocal traffic model. *Physical Review E*, 59(1):239.
- Wardrop, J. G. (1952). Road paper. some theoretical aspects of road traffic research. In *ICE Proceedings: Engineering Divisions*, volume 1, pages 325-362. Ice Virtual Library.
- Whitham, G. B. (2011). *Linear and nonlinear waves*, volume 42. Wiley-interscience.
- Witham, G. (1974). *Linear and nonlinear waves*.
- Xie, D., Gao, Z., and Zhao, X. (2008). Stabilization of traffic flow based on the multiple information of preceding cars. *Communications in Computational Physics*, 3(4):899-912.
- Yu, W. and Johansson, A. (2007). Modeling crowd turbulence by many-particle simulations. *Physical Review E*, 76(4):046105.
- Zhang, H. M. (1998). A theory of nonequilibrium traffic flow. *Transportation Research Part B: Methodological*, 32(7):485-498.
- Zhang, H. M. (2002). A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior. *Transportation Research Part B: Methodological*, 36(3):275-290.
- Zhang, X. and Jarrett, D. F. (1997). Stability analysis of the classical car-following model. *Transportation Research Part B: Methodological*, 31(6):441-462.
- Zhao, X. and Gao, Z. (2005). A new car-following model: full velocity and acceleration difference model. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 47(1):145-150.